

TR-O-0128

29

レーザマイクロビジョンの信号処理

下田平 寛

1996. 3.15

ATR光電波通信研究所

# レーザマイクロビジョンの信号処理

## 目次

1. はじめに	1
2. 周波数領域法の分解能 -Fourier 変換分解能-	1
3. ニューラルネット法	2
3.1 問題の設定	2
3.2 問題 3.1 の或る最適化問題への帰着	2
3.3 Hopfield 型ニューラルネットを用いた最適化問題の解法	4
3.4 ニューラルネットを用いた反射点位置推定法	4
3.5 実験データへの適用例	5
3.6 ニューラルネット法の分解能に関する考察	5
3.7 検討課題	6
4. Kernel MUSIC 法	6
4.1 Kernel MUSIC 法の提案	6
4.1.1 問題の定式化	6
4.1.2 Kernel MUSIC 法の考え方 -エルミート写像構成への帰着-	7
4.1.3 エルミート写像の構成 -空間平均化処理の意味-	7
4.2 Gram-Schmidt 直交化を用いた平均化法	8
4.3 シミュレーションによる Kernel MUSIC 法有効性の検証	9
4.3.1 処理時間の短縮	9
4.3.2 分解能の向上	10
4.4 実験データへの適用	10
4.5 処理時間短縮の試み	10
4.6 検討課題 -よい部分空間の定義を求め-	11
5. まとめ	12

## 1 はじめに

当研究所で開発中のレーザマイクロビジョンは、 $1\ \mu\text{m}$  オーダの3次元構造を持つ物体内部を非接触、非破壊で診断、検査することを目的としたレーダの一種である。通常のレーダでは、物体にパルス照射してエコーの遅延時間、すなわちインパルス応答を測定することにより物体内部の反射点位置を検出する。しかしこのパルス法(時間領域法とも呼ばれる)で $\mu\text{m}$  オーダの空間分解能(定義 1.1)を得るには、時間幅およそ $10^{-15}$  秒のパルスを発生させる複雑な光学系が必要となるため実用化には適さない。

そこで、レーザマイクロビジョンでは、上記インパルス応答とフーリエ変換の関係で結ばれる周波数応答を測定した後、信号処理によってインパルス応答を構成する周波数領域法を採用した。周波数領域法の利点は、その実現の鍵となる波長可変光源に半導体レーザを利用できることから、パルス法と比較して小型、低価格で、かつ高分解能の装置を実現可能なことである(実際の装置については [1] を参照)。

本論文では、測定した周波数応答からインパルス応答を構成するための信号処理法について述べる。第2節で周波数領域法の空間分解能が波長可変光源の波数(定義 1.2)帯域により決定されることを説明する。波数帯域により決定される分解能、すなわち Fourier 変換分解能を克服することを目的とした信号処理法として、当研究所で考案したニューラルネット法、Kernel MUSIC 法をそれぞれ第3、4節で述べる。各手法の性能をシミュレーションと、実験データへの適用により検証する。特に、Kernel MUSIC 法においては Fourier 変換法の約2倍の分解能が達成されることを実証する。

**定義 1.1** 空間分解能：或る測定法によって分離識別可能な二反射点間の最小距離を測定法の空間分解能といい、記号  $\Delta x$  で表す。簡単のため本論文では分解能とも呼ぶ。

**定義 1.2** 波数：波長  $\lambda$  と関係式  $k = 2\pi/\lambda$  で結ばれる物理量  $k$  を波数と呼ぶ。空間周波数とも呼ばれる。

## 2 周波数領域法の空間分解能 - Fourier 変換分解能 -

波数  $k$  の光を物体に照射して得られる反射波の複素振幅  $F(k)$  は、反射波の振幅、位相をそれぞれ  $a(k)$ ,  $\phi(k)$  として、 $F(k) = a(k) \exp(\sqrt{-1}\phi(k))$  と表される。周波数領域法では、波数帯域  $k_1 \leq k < k_2$  における周波数応答  $F(k)$  を測定した後、位置  $x$  における反射率  $f(x)$  を

$$f(x) = \int_{k_1}^{k_2} F(k) e^{-\sqrt{-1}kx} dk \quad (1)$$

と(有界区間の)Fourier 変換の形で計算する。周波数応答  $F(k)$  と式 (1) により分離識別可能な最短の二反射点間距離を Fourier 変換分解能と呼ぶ。

先ず波数帯域と Fourier 変換分解能の関係について考察する。データ未取得の帯域外、 $k < k_1$ ,  $k_2 \leq k$  へは、式 (2) で表されるように  $k_1 \leq k < k_2$  における測定データが周期的に延長されるものとする。

$$F(k + n(k_2 - k_1)) = F(k), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, k_1 \leq k < k_2 \quad (2)$$

特に  $k = k_1$ ,  $n = 1$  とおいて

$$F(k_1) = F(k_2) \quad (3)$$

条件 (3) を、位置  $x_i$  に反射率  $r_i$ ,  $i = 1, 2$  の二反射点が存在する場合に書き下すと、

$$r_1 e^{\sqrt{-1}k_1(2x_1)} + r_2 e^{\sqrt{-1}k_1(2x_2)} = r_1 e^{\sqrt{-1}k_2(2x_1)} + r_2 e^{\sqrt{-1}k_2(2x_2)} \quad (4)$$

式 (4) が任意の反射率  $r_i$  について成り立つためには

$$k_1(2x_1) = k_2(2x_1) + 2m\pi \quad (5)$$

$$k_1(2x_2) = k_2(2x_2) + 2n\pi, m, n \text{ は整数} \quad (6)$$

でなければならない。辺々引いて

$$2(k_2 - k_1)(x_2 - x_1) = 2(m - n)\pi \quad (7)$$

を得る。式 (7) の心は、

二反射点位置  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$  がデータ  $F(k)$ ,  $k_1 \leq k < k_2$  により識別されるためには、波数を  $k_1$  から  $k_2$  まで変化させたとき、 $x_2$  からの反射波の位相が  $x_1$  からのそれより少なくとも一回多く回転しなければならない

である。この心を十分納得した上では、式 (7) を導くのに要した議論は全て忘れてしまってもよい。以上の考察をまとめて次の命題 2.1 が得られた。

**命題 2.1** 波数帯域  $k_1 \leq k < k_2$  で取得した反射波データ  $F(k)$  から得られる空間分解能  $\Delta x$  は、帯域外へは  $F(k)$  が周期的に延長されるという仮定のもとで次式で与えられる。

$$\Delta x = \frac{\pi}{|k_2 - k_1|} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{|\lambda_2 - \lambda_1|}, \quad \text{ただし } k_i = 2\pi/\lambda_i, \quad i = 1, 2 \quad (8)$$

従って分解能は波数帯域に反比例する。

**例 2.2**  $\lambda_1 = 1.6 \mu\text{m}$ ,  $\lambda_2 = 1.5 \mu\text{m}$  とすると、空間分解能は  $\Delta x = 12 \mu\text{m}$  となる。

市販の波長可変光源の波長可変幅は高々  $0.1 \mu\text{m}$  であり、従って周波数領域法で得られる分解能は  $10 \mu\text{m}$  オーダに留まる (例 2.2 参照)。Fourier 変換分解能を克服するため、例えば、反射点数、反射点の存在範囲が既知といった先験情報を元に帯域外データを推定した上で位置推定を行う「超解像法」が盛んに研究されている。当研究所では、目標とする  $1 \mu\text{m}$  オーダの分解能を達成するため、ニューラルネット法、Kernel MUSIC 法を考案した。ニューラルネット法では反射点位置推定を或る最適化問題として定式化し、それをニューラルネットを用いて解く。また、Kernel MUSIC 法は当初電波到来方向推定法として提案され、位置推定にも適用されてきた MUSIC 法に、原理的考察を加えることにより、従来の MUSIC 法と比較して処理速度の高速化、高分解能化を図った手法である。次節以降、これらの処理法とその有効性について述べていく。

### 3 ニューラルネット法

飯塚、藤井らは測定データ  $F(k)$  から反射率分布  $f(x)$  を求める問題を或る最適化問題として定式化し、それを Hopfield らを起源とするニューラルネット法 [2] を用いて解くことを提案した [4]。本節では、ニューラルネット法の概要、実験データへの適用例を紹介した後、本手法により得られる空間分解能に関する筆者の考察を述べる。

#### 3.1 問題の設定

本節で扱う反射点位置推定問題を以下のように設定する。

**問題 3.1** 測定対象物に波数  $k_n$  の光を照射して得られる反射光データ  $\tilde{s}_n$ ,  $n = 1, \dots, N$  から反射点位置  $x_d$ , および反射率  $r_d$ ,  $d = 1, \dots, D$  を求め。一般に反射点の個数  $D$  は未知とする。今後の議論のため、測定データベクトル  $\tilde{\mathbf{s}} = (\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_N)^T$  を定義する。記号  $T$  は転置を表す。

#### 3.2 問題 3.1 の或る最適化問題への帰着

問題 3.1 の反射光データ  $\tilde{s}_n$  は、測定対象物が位置  $x_i$  に反射率  $r_i$  の反射点,  $i = 1, \dots, I$  を有するとの仮定のもとで

$$s_n = \sum_{i=1}^I r_i \exp(\sqrt{-1}k_n(2x_i)) \quad (9)$$

とモデル化される。モデル化データベクトル  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_N)^T$ 。そこで反射点位置  $x_i$  を式 (8) で与えられる  $\Delta x$  の整数倍に拘束した上で

$$\sum_{n=1}^N |\tilde{s}_n - s_n|^2 \rightarrow \text{最小} \quad (10)$$

となるよう、最適化パラメータ  $r_i$  を決定するのが第2節で述べた周波数領域法 (Fourier 変換法) であった。

さて、飯塚、藤井らは、測定、モデル化共分散行列をそれぞれ  $\tilde{R} = \tilde{s}\tilde{s}^\dagger$ ,  $R = s s^\dagger$  と定義した上で、問題 3.1 を式 (11) の最適化問題として定式化した。

$$\|\tilde{R} - R\|^2 = \|\tilde{s}\tilde{s}^\dagger - s s^\dagger\|^2 \rightarrow \text{最小} \quad (11)$$

記号  $^\dagger$  は共役転置を表し、 $N \times N$  行列  $R$  のノルム  $\|R\|$  は行列要素の絶対値自乗和 (12) で定義される。

$$\|R\|^2 = \sum_{l,m=1}^N |R_{lm}|^2 \quad (12)$$

式 (11) をニューラルネットワークを用いて解くために以下の近似 (15) が導入された。まず、位置  $x_i$  に反射率 1 の反射点を有する物体に光を照射して得られるデータベクトルという物理的意味を持つ  $I$  個の  $N$  次元ベクトル  $e_i$  を

$$e_i = \left( \exp(\sqrt{-1}k_1(2x_i)), \dots, \exp(\sqrt{-1}k_N(2x_i)) \right)^T, \quad i = 1, \dots, I \quad (13)$$

と定義し、モデル化データベクトルを

$$s = \sum_{i=1}^I r_i e_i \quad (14)$$

と書く。そしてモデル化共分散行列を次のように近似する。

$$\begin{aligned} R &= s s^\dagger = \left( \sum_{i=1}^I r_i e_i \right) \left( \sum_{j=1}^I r_j e_j \right)^\dagger \\ &= \sum_{i=1}^I |r_i|^2 e_i e_i^\dagger + \sum_{i \neq j} r_i r_j^* e_i e_j^\dagger, \quad \text{記号 } * \text{ は複素共役} \\ &\approx \sum_{i=1}^I |r_i|^2 e_i e_i^\dagger = \sum_{i=1}^I R_i e_i e_i^\dagger, \quad \text{ただし } R_i = |r_i|^2 \end{aligned} \quad (15)$$

この近似ではモデルに含まれる干渉項を無視した形になっている。近似 (15) の元で、最小化問題 (11) は  $R_i, i = 1, \dots, I$  をパラメータとした (16) に帰着する。

$$\begin{aligned} \|\tilde{s}\tilde{s}^\dagger - s s^\dagger\|^2 &= \left\| \tilde{s}\tilde{s}^\dagger - \sum_{i=1}^I R_i e_i e_i^\dagger \right\|^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^N |\tilde{s}_i \tilde{s}_j^*|^2 - 2 \sum_{i=1}^I R_i \text{tr}(\tilde{s}\tilde{s}^\dagger e_i e_i^\dagger) + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I R_i R_j \text{tr}(e_i e_i^\dagger e_j e_j^\dagger) \\ &= \sum_{i,j=1}^N |\tilde{s}_i \tilde{s}_j^*|^2 - 2 \sum_{i=1}^I |\tilde{s}^\dagger e_i|^2 R_i + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I |e_i^\dagger e_j|^2 R_i R_j \\ &= \sum_{i,j=1}^N |\tilde{s}_i \tilde{s}_j^*|^2 - 2 \sum_{i=1}^I I_i R_i + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I T_{ij} R_i R_j \rightarrow \text{最小} \end{aligned} \quad (16)$$

記号  $\text{tr}(A)$  は行列  $A$  のトレイス (対角項の和)  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^I A_{ii}$  を表す。また

$$T_{ij} = |e_i^\dagger e_j|^2, \quad I_i = |\tilde{s}^\dagger e_i|^2 \quad (17)$$

と定義した。ここでパラメータ  $R_i$  と非線型、かつ単調増加な入出力関係  $R_i = f(u_i)$  で結ばれる補助変数  $u_i$  を導入した上で、最小化すべき量  $E$  を改めて

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I T_{ij} R_i R_j - \sum_{i=1}^I I_i R_i + \frac{1}{\Omega} \sum_i \int_0^{R_i} f^{-1}(R) dR \quad (18)$$

と定義し、エネルギー関数と呼ぶ。

### 3.3 Hopfield 型ニューラルネットを用いた最適化問題の解法

Hopfield らは (18) の最小化の形に表現される最適化問題を次のように解くことを提案した。

#### ニューラルネットを用いた (18) の極小化法

非線型かつ単調増加の入出力関係  $R = f(u)$  を持つ  $I$  個のニューロン同士を結合係数  $T_{ij}$  で結んだネットワークを用意し、 $i$  番目のニューロンに外部から電流  $I_i$  を流し込む。このネットワークの定常状態において得られる各ニューロンの出力  $R_i$  を、式 (18) に代入すれば、エネルギー  $E$  の極小値が得られる。

この解法の根拠となるのが次の命題である。

**命題 3.2** ニューロンへの入力という意味を持つ補助変数  $u_i$  を

$$\dot{u}_i = \frac{du_i}{dt} = -\frac{u_i}{\Omega} - \sum_{j=1}^I T_{ij} R_j + I_i \quad (19)$$

に従って時間発展させると、定常状態  $t \rightarrow \infty$  においてエネルギー関数 (18) は極小値に収束する。

何故なら  $E = E(t)$  の時間発展を求めると

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \sum_{i=1}^I \left( \frac{dE}{dR_i} \right) \left( \frac{dR_i}{dt} \right), \\ \text{式(18), (19)より} \quad \frac{dE}{dR_i} &= \sum_{j=1}^I T_{ij} R_j - I_i + \frac{u_i}{\Omega} = -\frac{du_i}{dt}, \\ \frac{dR_i}{dt} &= \frac{df(u_i)}{du_i} \frac{du_i}{dt}, \quad \text{および} \\ f(u_i) \text{ の単調増加性より} \quad \frac{df(u_i)}{du_i} &> 0 \text{ に注意して} \\ \frac{dE}{dt} &= -\sum_{i=1}^I \left( \frac{df(u_i)}{du_i} \right) \left( \frac{du_i}{dt} \right)^2 < 0 \end{aligned} \quad (20)$$

となって、エネルギー  $E = E(t)$  は単調減少するから。

### 3.4 ニューラルネットを用いた反射点位置推定法

以上の議論をまとめて、ニューラルネットを用いた反射点位置推定問題の解法を得る。

**step1** 測定データベクトル  $\tilde{s}$  と、位置  $x_i$  に反射率 1 の反射点があると仮定して得られる反射波ベクトル  $e_i$  (式 (13) で与えられる) から、ニューロン間結合係数  $T_{ij}$ 、ニューロンへの流入電流  $I_i$  を式 (17) に従って計算する。

**step2** 位置  $x_i$  におけるエネルギー反射率を意味するパラメータ  $R_i$  と非線型、かつ単調増加な入出力関係  $R_i = f(u_i)$  で結ばれる補助変数  $u_i$  を導入する。

**step3**  $u_i$  を式 (19) に従って時間発展させる。

**step4**  $t \rightarrow \infty$  でエネルギー関数 (18) は極小値に収束するので、(19) が収束した時点、すなわち  $\dot{u}_i \approx 0$  となった時点で、 $R_i > 0$  となる位置  $x_i$  に振幅反射率  $\sqrt{R_i}$  の反射点が存在すると推定される。

### 3.5 実験データへの適用例

非線型、かつ単調増加の入出力関係として

$$R_i = \begin{cases} Au_i & u_i \geq 0, \text{ 正定数 } A \text{ は増幅率と呼ばれる} \\ 0 & u_i < 0 \end{cases} \quad (21)$$

を採用し、光ファイバ断面、間隙を有するガラス板の測定データから得られた物体像(エネルギー反射率の分布)をそれぞれ図1, 2に示した. 実線がニューラルネット法, 点線がFast Fourier Transform(FFT)法による像を表す. 実験条件の波長帯域1.5 ~ 1.6  $\mu\text{m}$  から決まるFourier変換分解能は12  $\mu\text{m}$  である. 二例とも各反射点においてニューラルネット法がFFT法よりも鋭い(幅の狭い)ピークを与えていることが分かる. この2例で確認されたニューラルネット法の分解能は高々30  $\mu\text{m}$  であるが, 鋭いピークが得られたことをもって, ニューラルネット法によりFourier変換分解能を克服可能と結論づけられるであろうか? この点について次に考察する.

### 3.6 ニューラルネット法の分解能に関する考察

記述を簡略化するため, 以下の議論では $\Omega = 1$ とし, さらにHopfieldらの提案に従ってニューロン間の自己結合係数 $T_{ii}$ を0と置く. 図1, 2の計算もこれらの条件の元で行った. ニューラルネット法により位置 $x_i, x_j$ に反射点が存在すると推定された場合, (18), (21), および仮定 $T_{ii} = 0$ よりエネルギー関数は次式で与えられる.

$$E(R_i, R_j) = T_{ij}R_iR_j - I_iR_i - I_jR_j + \frac{R_i^2 + R_j^2}{2A} \quad (22)$$

これを平方完成して

$$E(R_i, R_j) = \frac{1}{2A} \{R_i - A(I_i - T_{ij}R_j)\}^2 + \alpha \left(R_j - \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{A^2I_i^2}{2} - \frac{\beta^2}{4\alpha} \quad (23)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A} - AT_{ij}\right), \quad \beta = I_j - AT_{ij}I_i$$

(23)が或るエネルギー反射率値の組 $(R_i, R_j)$ において最小値を持つ, すなわち位置 $x_i, x_j$ にそれぞれ反射率 $R_i, R_j$ の反射点が存在すると推定されるためには,  $E(R_i, R_j)$ は下に凸でなければならぬ. よって

$$\alpha > 0, \text{ 従って } AT_{ij} < 1$$

であることが必要. 以上の考察をまとめて次の命題を得る.

**命題 3.3** 位置 $x_i, x_j$ に反射点が存在すると推定されるためには,  $i, j$ 間の結合係数 $T_{ij}$ が関係

$$AT_{ij} < 1 \quad (24)$$

を満たす必要がある. この条件の元で, エネルギー反射率 $R_i, R_j$ はそれぞれ

$$R_i = \frac{A(I_i - AT_{ij}I_j)}{1 - A^2T_{ij}}, \quad R_j = \frac{A(I_j - AT_{ij}I_i)}{1 - A^2T_{ij}} \quad (25)$$

に収束する.

さて,  $e_i$ の定義(13), および結合係数の定義(17)より $T_{ij}$ は $|x_i - x_j|$ のみの函数であり, 増幅率の値 $A$ に依存して,  $x_i$ の周辺 $|x_i - x_j| < \delta(A)$ では $AT_{ij} \geq 1$ となる区間が存在する. 区間の幅 $\delta$ は増幅率に依存するので $\delta = \delta(A)$ と書いた. 命題3.3と合わせ次の結論, および系が得られた.

**結論 3.4** ニューラルネット法では, ネットワークの定常状態において極大値を持つニューロン, すなわち推定反射点, の周辺に他のピークの存在を許さない区間が必ず存在し, この区間幅が分解能を決定する. すなわち, 反射点 $x_i$ から距離 $\delta = \delta(A)$ 以内に他の反射点が存在したとしても, ニューラルネット法ではそれを認識し得ない. この区間幅 $\delta$ は増幅率 $A$ により決定される.

例 3.5  $\delta(10^{-3}) \approx 12 \mu\text{m}$ ,  $\delta(10^{-5}) \approx 6 \mu\text{m}$  である.

系 3.6 任意の間隔でニューロンを配置して反射点位置推定を実行可能なニューラルネット法では, 式 (8) で与えられる  $\Delta x$  の整数倍の位置でのみ反射率が算出される Fourier 変換法と比較して精密な物体像が得られる可能性がある.

### 3.7 検討課題

1. 近似 (15) の正当性: データ共分散行列  $\hat{R}$  に平均化操作を施すこと試みた. しかし平均化パラメータと推定結果の関係等, 不明な点が多い.
2. 自己結合係数  $T_{ii} = 0$  と置くことの正当性: 経験的に式 (17) の  $T_{ii} \neq 0$  を用いると, 計算過程が振動することが多い.
3. 増幅率の決定法: 命題 3.3 からは,  $A$  を十分小さく取る, あるいはベクトル  $e_i$  を規格化することにより分解能の向上が見込まれる (結論 3.4 で述べたピークの存在し得ない区間をいくらでも狭くできる). しかし実際試みるとネットワークの収束に要する時間が増大する上, 誤った解に収束する場合が多い.

以上の課題を解決する上で, エネルギー関数 (18) の幾何学的描像を得ることが重要と思われる.

## 4 Kernel MUSIC 法

Schmidt が多重波到来方向推定法として提案した MUSIC 法 [3] は信号回復問題の優れた解法でありこれまで様々な改良, 拡張が行われてきた. 中でも本手法をコヒーレントな受信データからの信号回復にも適用するための空間平均化法は重要である [5][6].

MUSIC 法をレーザマイクロビジョンの信号処理に応用する場合, 問題となるのは, Fourier 変換法等と比較した場合の処理時間の長さである. 処理時間の大部分が費される, 受信データから構成される共分散行列の固有値解析部を簡略化することができれば, 大幅な処理時間短縮を見込める. 一方, 理論的視点からは, 信号回復に共分散行列を介在させる必要性, 雑音部分空間の描像, 平均化処理の意味等, 筆者には不明な部分が多かった. そこで MUSIC 法の理解をも目標として研究を進めた結果, 以下の Kernel MUSIC 法に到達した. 雑音部分空間という筆者にとって捉えどころのない対象が, 線型写像の核という確固とした存在感のあるものに置換えられたことが収穫である.

**定義 4.1** エルミート写像 (行列): 行列  $R$  がその共役転置  $R^+$  と等しい時  $R$  をエルミート行列と呼ぶ.

**定義 4.2** Kernel MUSIC 法: MUSIC 法において構成される共分散行列を, 受信データの構成要素ベクトルで張られる部分空間へのエルミート写像 (行列) ととらえ, 写像の像と核との直交性を利用して要素ベクトルを推定する方法.

この定義に基づけば, 平均化処理とは上記エルミート写像を近似的に構成するための手続きと思える. この構成において, 従来の平均化法によって構成される写像の像空間に含まれていた冗長性を Gram-Schmidt 直交化 [10] によって取り除く. この冗長性の除去が高分解能化にとって必要であることを論じる. Kernel MUSIC 法は従来の MUSIC 法とは異なり, 固有値解析を行わないため処理時間の短縮化が可能である. また, Gram-Schmidt 直交化を用いる平均化法によれば, 従来最良の分解能を持つとされてきた Forward Backward 平均化法では分離観測できなかった反射点をも分解可能であることをシミュレーションにより示す. Kernel MUSIC 法を薄膜測定データに適用し Fourier 変換法の約 2 倍の分解能が得られることを実証する. 最後に処理時間のさらなる短縮化について考察する.

### 4.1 Kernel MUSIC 法の提案

#### 4.1.1 問題の定式化

以下複素数体  $\mathbb{C}$  上の  $N$  次元ベクトル空間  $\mathbb{C}^N$  で考察する. アンテナアレイによる多重波到来方向推定や, レーザマイクロビジョンにおける反射点位置推定等はいずれも次のように定式化される.



**問題 4.3** 複数のベクトル  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_D$  の重ね合せであるデータベクトル  $\mathbf{s}$  が与えられたとき、その要素ベクトル  $\mathbf{a}_d$  を求めよ。

#### 4.1.2 Kernel MUSIC 法の考え方 – エルミート写像構成への帰着 –

次に、上記問題は  $\mathbb{C}^N$  から  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_D$  で張られる部分空間  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_D\}$  へのエルミート写像 (行列)  $R$  の構成に帰着されることを示す [9].

$$R: \mathbb{C}^N \longrightarrow \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_D\} \quad (26)$$

今、(26) が構成されたと仮定する。  $R$  のエルミート性より  $R$  の像  $Im(R) = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_D\}$  と、核  $Ker(R) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N | R\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$  は直交する。すなわち任意の  $\mathbf{x} \in Im(R), \mathbf{y} \in Ker(R)$  に対し

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (R\mathbf{u}, \mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{u}, R\mathbf{y}) = (\mathbf{u}, \mathbf{0}) = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  はベクトル  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  の内積を表し、成分で書くと  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^N x_i^* y_i$ .

この性質、エルミート写像の像と核との直交性、を利用すれば、要素ベクトルを以下の手順で推定することが可能である。

**step1** 連立一次方程式  $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$  を解いて  $Ker(R)$  の基底  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M$  を求める

**step2**  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M$  より、  $Ker(R)$  の正規直交基底  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_M$  を求める。ここで  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_M$  が  $Ker(R)$  の正規直交基底であるとは  $Ker(R)$  に属する任意のベクトル  $\mathbf{x}$  が

$$\mathbf{x} = \sum_{m=1}^M (v_m, \mathbf{x}) v_m$$

と一意に展開されることを意味する。

**step3** 信号要素ベクトルの候補  $\mathbf{u}$  について、次の評価関数  $f(\mathbf{u})$  を計算する

$$f(\mathbf{u}) = \sum_{m=1}^M |(v_m, \mathbf{u})|^2 \quad (27)$$

式 (27) はテストベクトル  $\mathbf{u}$  の  $Ker(R)$  への射影成分を評価するものである。  $f(\mathbf{u})$  を極小化する  $\mathbf{u}$  が信号を構成する要素ベクトルと推定される。

このように、  $Ker(R)$  と  $Im(R)$  との直交性に基づき、(27) を極小化する  $\mathbf{u}$  を要素ベクトルと推定するのが Kernel MUSIC 法である。以上の考察により、信号回復問題はエルミート写像 (26) の構成に帰着された。

#### 4.1.3 エルミート写像の構成 – 空間平均化処理の意味 –

従来の MUSIC 法においてコヒーレント信号からの信号回復を行なうための空間平均化処理とは、受信データ  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_N)^T$  から  $L$  次元ベクトル  $\mathbf{t}_j, j = 1, \dots, J$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_j &= (t_{j(1)}, \dots, t_{j(L)})^T, \\ 1 &\leq j(1), \dots, j(L) \leq N, \quad L < N \end{aligned} \quad (28)$$

を切り出した後 ( $\mathbf{t}_j$  はサブアレイベクトルとも呼ばれる),

$$R_{approx} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \mathbf{t}_j \mathbf{t}_j^\dagger \quad (29)$$

を作ることであった。この操作は、エルミート写像 (26) の構成として自然に解釈される。

写像 (26) を  $R_0 = ss^\dagger$  を出発点として構成することを考える。  $R_0$  は求むる写像  $R_{ideal}$  と干渉項  $R_{inter}$  の和となっている。このとき  $Im(R_0)$  は 1 次元の部分空間である。

$$R_0 = R_{ideal} + R_{inter}$$

$$R_{ideal} = \sum_{d=1}^D \mathbf{a}_d \mathbf{a}_d^\dagger, \quad R_{inter} = \sum_{d \neq d'}^D \mathbf{a}_d \mathbf{a}_{d'}^\dagger$$

平均化操作 (29) の要点は、サブアレイベクトルの切り出し方 (28) を工夫することにより、干渉項  $R_{inter}$  の減衰を図り、写像  $R_{approx}$  を  $R_{ideal}$  に近づけることにある。特に要素ベクトルの隣接成分の間に

$$(\mathbf{a}_d)_{i+1} / (\mathbf{a}_d)_i = e^{(\sqrt{-1}\theta)}$$

の関係がある場合、干渉項に減衰因子

$$\frac{1}{J} \left| \sum_{j=1}^J (e^{\sqrt{-1}\theta})^k \right| = \frac{1}{J} \left| \frac{\sin \frac{J\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right| \leq 1$$

が乗せられる。ただし減衰効果の代償として、  $L < N$  としたため、たとえ平均化処理により干渉項を完全に除去し得たとしても、  $R_{approx}$  は  $R_{ideal}$  の近似写像に留まる。例として、Forward, Forward Backward 平均化ではそれぞれエルミート写像  $R_f, R_{fb}$  を

$$\mathbf{f}_j = (s_j, \dots, s_{j+L-1})^T$$

$$\mathbf{b}_j = (s_{N-j+1}^*, \dots, s_{N-j+2-L}^*)^T$$

$$R_f = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \mathbf{f}_j \mathbf{f}_j^\dagger$$

$$R_{fb} = \frac{1}{2J} \sum_{j=1}^J (\mathbf{f}_j \mathbf{f}_j^\dagger + \mathbf{b}_j \mathbf{b}_j^\dagger)$$

とする。上記構成により  $Im(R_{fb})$  の次元は最高  $2J$  まで拡大される。

## 4.2 Gram-Schmidt 直交化を用いた平均化法

Kernel MUSIC 法では従来の MUSIC 法とは異なり固有値解析を要しないため、計算時間の短縮化が期待されるが (4.3.1 を参照), 分解能は (従来 MUSIC 法と) 同一である。本節では分解能の向上を図るため、Forward Backward 平均化法等で構成される  $Im(R_{approx})$  に含まれる冗長性の除去について論じる [11]。

式 (29) より  $Im(R_{approx})$  は  $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_J$  で張られる部分空間であるが、これらのベクトル同士が一般に直交していないと言う意味で  $Im(R_{approx})$  は冗長性を含んでいる。受信データ中に分解困難な構成要素ベクトルが含まれるようになると、  $\mathbf{t}_k$  の中には数値的に互いにほとんど一次従属なベクトルが存在するようになる。例として以下の条件を満たすベクトル対  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_1 + \mathbf{g}$$

$$(\mathbf{t}_1, \mathbf{g}) = 0, \quad \|\mathbf{g}\| \ll \|\mathbf{t}_1\|$$

から直接、和 (29) を作ると、干渉項  $\mathbf{t}_1 \mathbf{g}^\dagger, \mathbf{g} \mathbf{t}_1^\dagger$  により、微小項  $\mathbf{g} \mathbf{g}^\dagger$  が数値的に埋もれてしまい、  $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$  の解に大きな誤差の含まれる可能性がある。そこで Gram-Schmidt 直交化により  $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_J$  から直交成分  $\mathbf{u}_d$  を逐次抽出することにより、有意の情報が冗長性に埋もれるのを防ぐことが可能となる。抽出手続きは以下のように与えられる。

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{t}_1 / \|\mathbf{t}_1\|,$$

$$\text{ただし, } \|\mathbf{t}_i\| = \max_{1 \leq k \leq J} \|\mathbf{t}_k\|$$

とし、以下のステップを

$$\begin{aligned} t_j^{(L)} &= t_j^{(L-1)} - (u_{L-1}, t_j^{(L-1)})u_{L-1}, \quad j = L, \dots, J, \\ u_L &= t_i^{(L)} / \|t_i^{(L)}\|, \quad \|t_i^{(L)}\| = \max_{L \leq j \leq J} \|t_j^{(L)}\| \end{aligned}$$

$$L = 2, 3, \dots, \text{ただし } t_i^{(1)} = t_i$$

を  $\|t_i^{(L)}\| < \epsilon$  となるまで繰り返す。得られた  $u_1, \dots, u_D$  を用い、像空間に冗長性を含まない  $R_{gs}$  が

$$R_{gs} = \frac{1}{D} \sum_{d=1}^D u_d u_d^\dagger$$

と構成される。  $\text{Ker}(R_{gs})$  の基底は  $\begin{pmatrix} u_1^\dagger \\ \vdots \\ u_D^\dagger \end{pmatrix}$  を掃き出し法により

$$\begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,D} & \dots & u_{1,L} \\ & u_{2,2} & \dots & u_{2,D} & \dots & u_{2,L} \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & u_{D,D} & \dots & u_{D,L} \end{pmatrix}$$

と変形した後、連立一次方程式

$$Ry_m = -u_m, \quad m = 1, 2, \dots, L - D$$

$$R = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,D} \\ & u_{2,2} & \dots & u_{2,D} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{D,D} \end{pmatrix}, \quad u_m = \begin{pmatrix} u_{1,D+m} \\ u_{2,D+m} \\ \vdots \\ u_{D,D+m} \end{pmatrix}$$

を後退代入法で解くことにより求められる。共分散行列  $R_{gs}$  の陽な計算はもはや不要となった。

### 4.3 シミュレーションによる Kernel MUSIC 法有効性の検証

本節では、等間隔で存在する 5 反射点位置を推定するシミュレーションにより Kernel MUSIC 法の有効性を検証する。筆者らの実験条件を考慮し、プローブ波の波長掃引範囲を  $1.5 \sim 1.6 \mu\text{m}$  として、受信データを作成した。

#### 4.3.1 処理時間の短縮

Kernel MUSIC 法は固有値解析を行わないため、従来の MUSIC 法よりも処理時間が短縮される。表 1 にサブレイベクトルの次元  $L$  をパラメータとした処理時間比較結果を示す。

$$T_{KM/M} = \frac{\text{KernelMUSIC法の処理時間}}{\text{従来MUSIC法の処理時間}}$$

である。シミュレーションの範囲では Kernel MUSIC 法において MUSIC 法の 5 ~ 10 倍の高速化が達成されている。

Kernel MUSIC 法において、最も計算負荷の高い  $\text{Ker}(R)$  の正規直交基底を計算する部分の手間は  $O(L^3)$  である。一方、シミュレーションによれば従来 MUSIC 法の計算主要部である固有値解析部は  $O(L^{2.3})$  の手間を有することが分かった。したがって、サブレイベクトルの次元が十分大きな場合は、処理時間に関する Kernel MUSIC 法の優位性が失われてしまうことになる。そこで筆者らは従来 MUSIC 法の、より本質的な処理時間短縮についての研究を行っている [12]。

	サブアレイベクトルの次元 $L$			
	50	100	200	400
$T_{KM/M}$	0.08	0.13	0.14	0.15

表 1: 処理時間の比較結果

#### 4.3.2 分解能の向上

図 3, 図 4 にそれぞれ Forward Backward 平均化法, Gram-Schmidt 直交化を用いた平均化法による反射点位置推定結果を示す. Forward Backward 平均化法ではサブアレイベクトルの数値的一次独立性が悪化する反射点間距離において推定に失敗しているのに対し, Gram-Schmidt 直交化を用いた場合は, より狭い反射点間隔まで推定可能であることが分かる. ここで受信データの次元  $N = 64$ , サブアレイベクトルの次元  $L = 51$  とした. 表 2 に反射点数 4, 5, 6 点の場合, 両平均化法により得られた分解能の比較結果を示した. Gram-Schmidt 平均化により 1.2 ~ 4 倍の高分解能化が達成されていることが分かる.

反射 点数	平均化法	
	Forward Backward	Gram-Schmidt
4	0.9 $\mu\text{m}$	0.2 $\mu\text{m}$
5	3.2 $\mu\text{m}$	0.9 $\mu\text{m}$
6	4.0 $\mu\text{m}$	3.2 $\mu\text{m}$

表 2: 分解能の比較

#### 4.4 実験データへの適用

Kernel MUSIC 法を実験データへ適用し分解能を検証する. 測定対象は図 5 に示す GaAs 基板上に塗布された厚さ 7 ~ 26  $\mu\text{m}$  の複数のレジスト薄膜で, 二つの反射点を持つ. データ取得時の波長掃引範囲 1.52 ~ 1.58  $\mu\text{m}$  から決まる Fourier 変換分解能は 20  $\mu\text{m}$  である.

図 6 には推定結果例 (膜厚 16  $\mu\text{m}$ ), 表 3 には種々の膜厚に対する Fourier 変換法, Kernel MUSIC 法による推定結果と, 接触型の表面粗さ計による測定値を示した. 本実験では推定結果の平均化法への依存性は見られなかった. Kernel MUSIC 法による推定値は厚さ 16  $\mu\text{m}$  まで表面粗さ計による測定値とよく一致しており, この結果から Fourier 変換法の約 2 倍の分解能を持つことが実証された.

推定結果		表面粗さ計による測定値
Fourier 変換法	K-MUSIC 法	
推定不能	27 $\mu\text{m}$	26 $\mu\text{m}$
推定不能	16 $\mu\text{m}$	16 $\mu\text{m}$
推定不能	14 $\mu\text{m}$	10 $\mu\text{m}$
推定不能	推定不能	7 $\mu\text{m}$

表 3: 膜厚推定結果

#### 4.5 処理時間短縮への試み

4.3.1 で触れた通り, Kernel MUSIC 法の計算の手間は  $O(L^3)$  に比例して増大する. 本節では手間の増大度のより小さい処理手法について考察する. サブアレイベクトルの次元を  $L$  として, Kernel MUSIC 法の

処理を改めてまとめると次のようになる。

step1 データ  $s$  より正規直交サブアレイベクトル  $u_1, \dots, u_D$  を作る。

step2  $R = \sum_{d=1}^D u_d u_d^\dagger$  で定義されるエルミート写像  $R$  の核  $\text{Ker}(R)$  の基底  $w_{D+1}, \dots, w_L$  を作る。

step3  $w_{D+1}, \dots, w_L$  を正規直交化して  $\text{Ker}(R)$  の正規直交基底  $x_{D+1}, \dots, x_L$  を作る。  $\text{Ker}(R)$  への射影作用素  $P_1$  が次式で定義される。

$$P_1 = \sum_{l=D+1}^L x_l x_l^\dagger \quad (30)$$

step4 テストベクトル  $y$  について  $\|P_1 y\|^2$  を評価する。  $\|P_1 y\|^2$  を極小化する  $y$  を信号構成要素ベクトルと推定する。

この過程で最も手間を要するのは、  $\text{Ker}(R)$  への射影作用素を構成するため  $\text{Ker}(R)$  の正規直交基底を求める step2 である。ところが

$$u_1, \dots, u_D, x_{D+1}, \dots, x_L \text{ が } \mathbb{C}^L \text{ の正規直交基底をなす}$$

という事実に注意すれば、  $\text{Ker}(R)$  への射影作用素は

$$P_2 = I_L - \sum_{d=1}^D u_d u_d^\dagger, \quad I_L \text{ は } L \text{ 次元の単位行列} \quad (31)$$

によっても与えられるので、上記処理の内 step2, step3 は理論的には不要である。 step1 の手間は  $O(L)$  であることから、  $P_2$  を用いれば、処理時間は  $L$  に比例して増大する。

そこで、理論的には同一の推定結果を与えるはずの  $\text{Ker}(R)$  への射影作用素  $P_1, P_2$  について反射点数をパラメータとした分解能の比較 (表 4)、サブアレイベクトルの次元をパラメータとした処理時間の比較 (表 5) を行った。分解能に関しては  $P_1$  の方が 2 ~ 3 倍良好な結果を得ているが、逆に処理時間に関しては  $P_2$  の方が 10 倍以上短縮化を達成している。  $P_2$  を用いた場合、計算誤差のために本来非負値であるべき評価関数値  $\|P_2 y\|^2$  に負値が現れるために分解能が劣化してしまうことが分かっている。

反射点数	用いた射影作用素	
	$P_1$	$P_2$
4	0.2 $\mu\text{m}$	0.6 $\mu\text{m}$
5	0.9 $\mu\text{m}$	1.6 $\mu\text{m}$
6	3.2 $\mu\text{m}$	3.2 $\mu\text{m}$

表 4：射影作用素と分解能

サブアレイ の次元 $L$	用いた射影作用素	
	$P_1$	$P_2$
60	0.27 s	0.03 s
120	1.28 s	0.06 s
240	9.80 s	0.14 s

表 5：射影作用素と処理時間 (秒)

#### 4.6 検討課題 – よい部分空間の定義を求め –

検討課題を明確化するために問題 4.3 をやや抽象化して再記する。

**問題 4.3'** データ  $s$  から、写像  $R: \mathbb{C} \rightarrow \{a_1, \dots, a_D\}$  の核の よい部分空間 を構成せよ。  $s$  の要素ベクトルの推定は、テストベクトルの部分空間への射影成分を評価することによってなされる。

ここで良い部分空間の満たすべき条件としては、少ない計算量で構成でき、データに含まれる誤差に起因する推定性能への影響が小さく、かつ正しい推定結果を与える等が挙げられる。今のところ感覚的表現しか得られていないこれらの条件を数理的に定式化することが最初の課題である。部分空間同士の距離の定義を与えることあたりが第一着手となり得ると思える。

## 5 まとめ

レーザマイクロビジョンにおいて Fourier 変換分解能を克服するための信号処理法として, 当研究所で考案したニューラルネット法, Kernel MUSIC 法のアルゴリズム, 性能, 検討課題を述べた. 特に Kernel MUSIC 法については実験データへの適用により Fourier 変換法の約 2 倍の分解能をもつことを実証した.

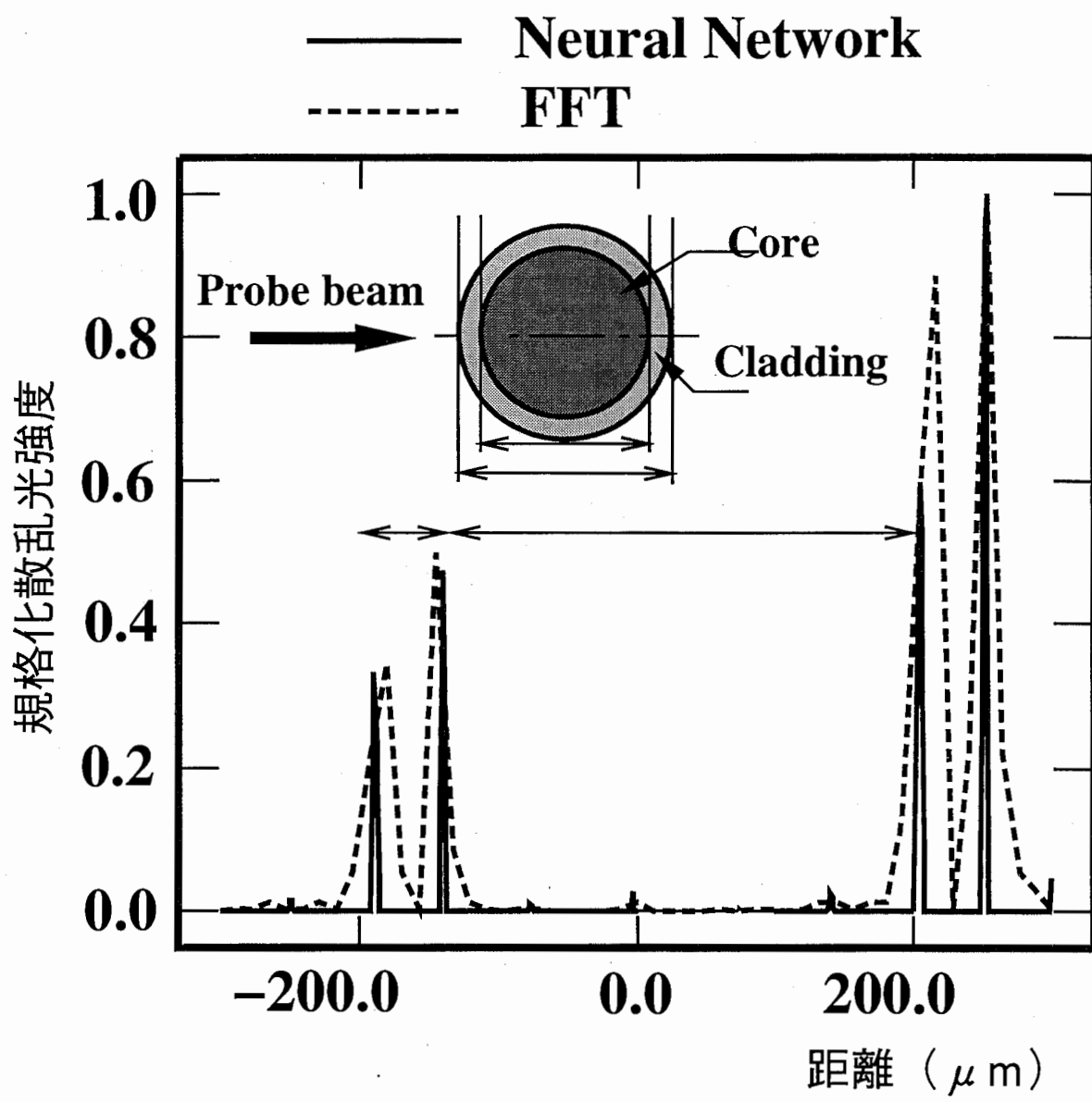
謝辞 日頃御指導頂くトロント大学飯塚教授, 北海道大学大鐘助教授, ATR 光電波通信研究所猪股社長, 小川室長に感謝いたします. 検証実験に用いる測定試料を作成していただいた今岡研究員と有益な議論をしていただいた多賀研究員に感謝いたします.

## 参考文献

- [1] 下田平寛, “リアルタイムレーザマイクロビジョン,” ATR テクニカルレポート
- [2] J.J.Hopfield, “Neurons with graded response have collective computational abilities like those of two-state neurons,” Proc. Natl. Acad. Sci. USA 81, pp.3088-3092, 1984.
- [3] R.O.Schmidt, “Multiple emitter location and signal parameter estimation,” Proc. RADC Spectral Est. Workshop, pp.243-258, 1979.
- [4] K.Iizuka and S.Fujii, “Neural-network laser radar,” Applied Optics, vol.33, no.13, pp.2492-2501, 1994.
- [5] Tie-Jun Shan, Mati Wax, Thomas Kailath, “On spatial smoothing for direction-of-arrival estimation of coherent signals,” IEEE ASSP-33, pp.806-811, 1985.
- [6] S.U.Pillai, B.H.Kown, “Forward/backward spatial smoothing techniques for coherent signal identification,” IEEE ASSP-37, pp.8-15, 1989.
- [7] F.Tagata,H.Shimotahira,K.Iizuka, “An approach to an ultra resolution fault locator,” Proc. Int. Laser Radar Conf., pp.237-239, 1994.
- [8] H.Shimotahira,F.Tagata,S.Fujii, K.Iizuka, “3D Laser Microvision,”in Optical methods in biomedical and enviromental sciences, H.Ohzu et al. Ed., Elsevier Science, pp.113-116, 1994.
- [9] H.Shimotahira, “On the kernel MUSIC algorithm,”Proc. ICASSP, vol.2, pp.909-912, 1995.
- [10] 森, 杉原, 室田, “線形計算,” 岩波講座, 応用数学, 方法 2
- [11] 下田平, 多賀, “Kernel MUSIC 法の提案,” 信学技報 DSP95-156, CS95-179, pp.37-42
- [12] F.Tagata, H.Shimotahira, “高速化 Kernel MUSIC 法の提案,” 信学技報 DSP95-157, CS95-180, pp.43-48
- [13] H.Shimotahira, F.Tagata, “On the Kernel MUSIC algorithm with a non-redundant spatial smoothing technique,” Transactions of IEICE デジタル信号処理小特集号投稿中.
- [14] F.Tagata, H.Shimotahira, “The fast Kernel MUSIC algorithm,” Transactions of IEICE デジタル信号処理小特集号投稿中.

## 図索引

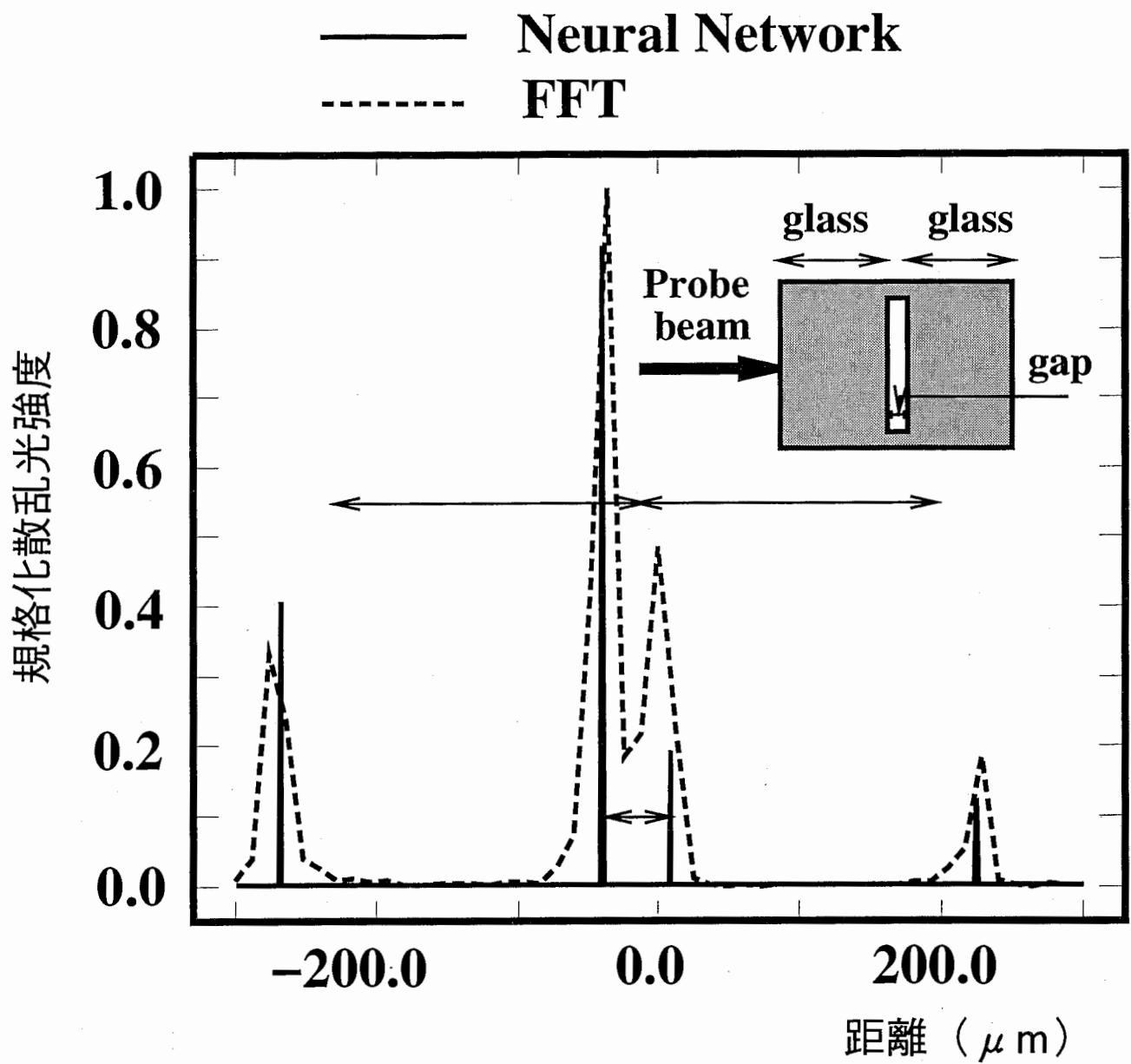
- 図 1 レーザマイクロビジョンにより得られた光ファイバ断面像.
- 図 2 レーザマイクロビジョンにより得られた間隙を有するガラス像.
- 図 3 Forward & Backward 平均化法による反射点位置推定結果.
- 図 4 Gram-Schmidt 平均化法による反射点位置推定結果.
- 図 5 分解能検証に用いた測定対象 (レジスト薄膜).
- 図 6 測定結果例 (膜厚 16  $\mu\text{m}$  の場合)



	真値	測定値
コア直径	<b>318</b>	<b>360</b>
クラッド層の厚さ	<b>38</b>	<b>36</b>

図 1 : レーザマイクロビジョンにより得られた光ファイバ断面像





	真値	測定値
間隙の間隔	27	36
ガラスの厚さ	221	228

図2：レーザーマイクロビジョンにより得られた間隙を有するガラス像

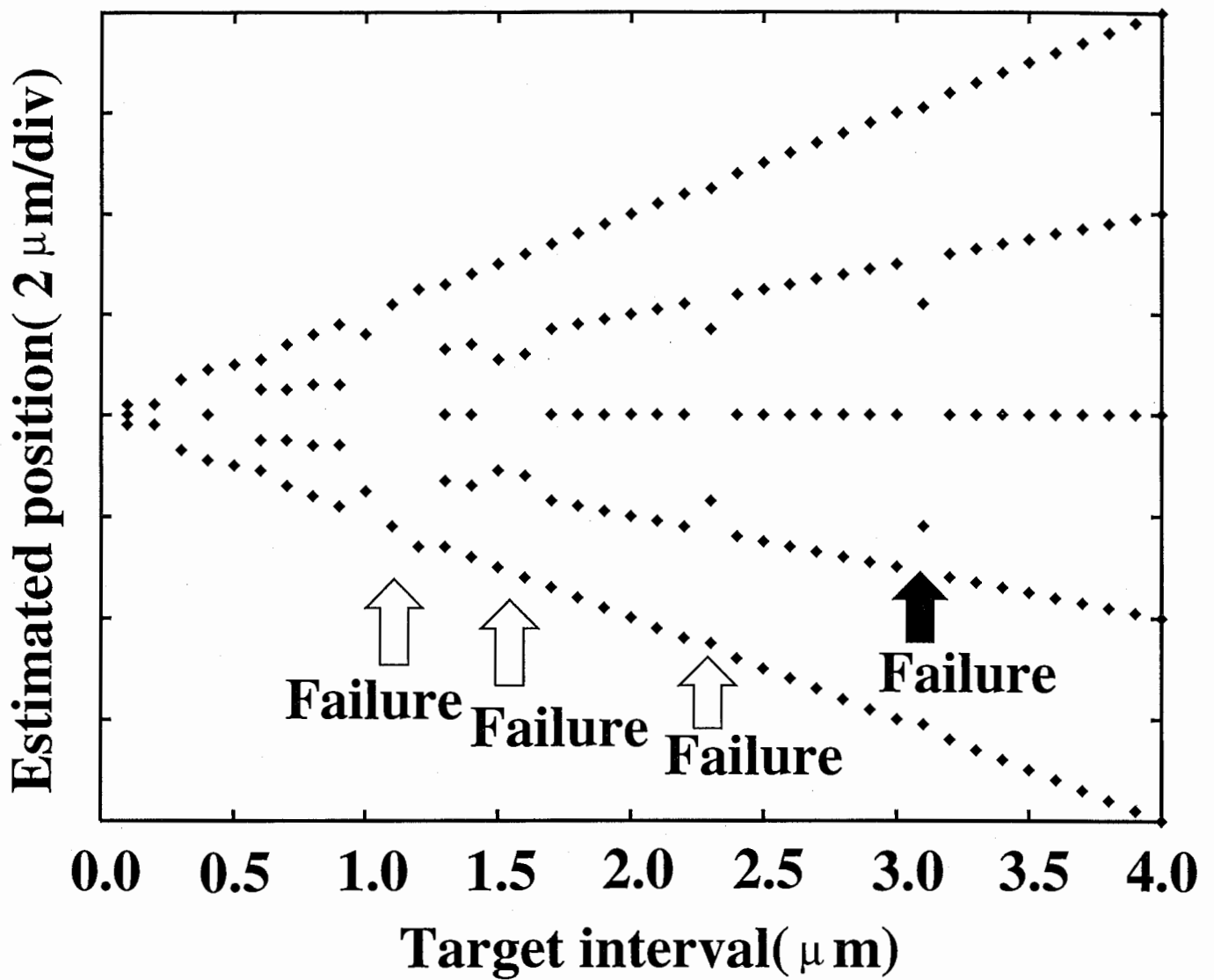


図3 : Forward & Backward平均化法を用いた場合の反射点位置推定結果

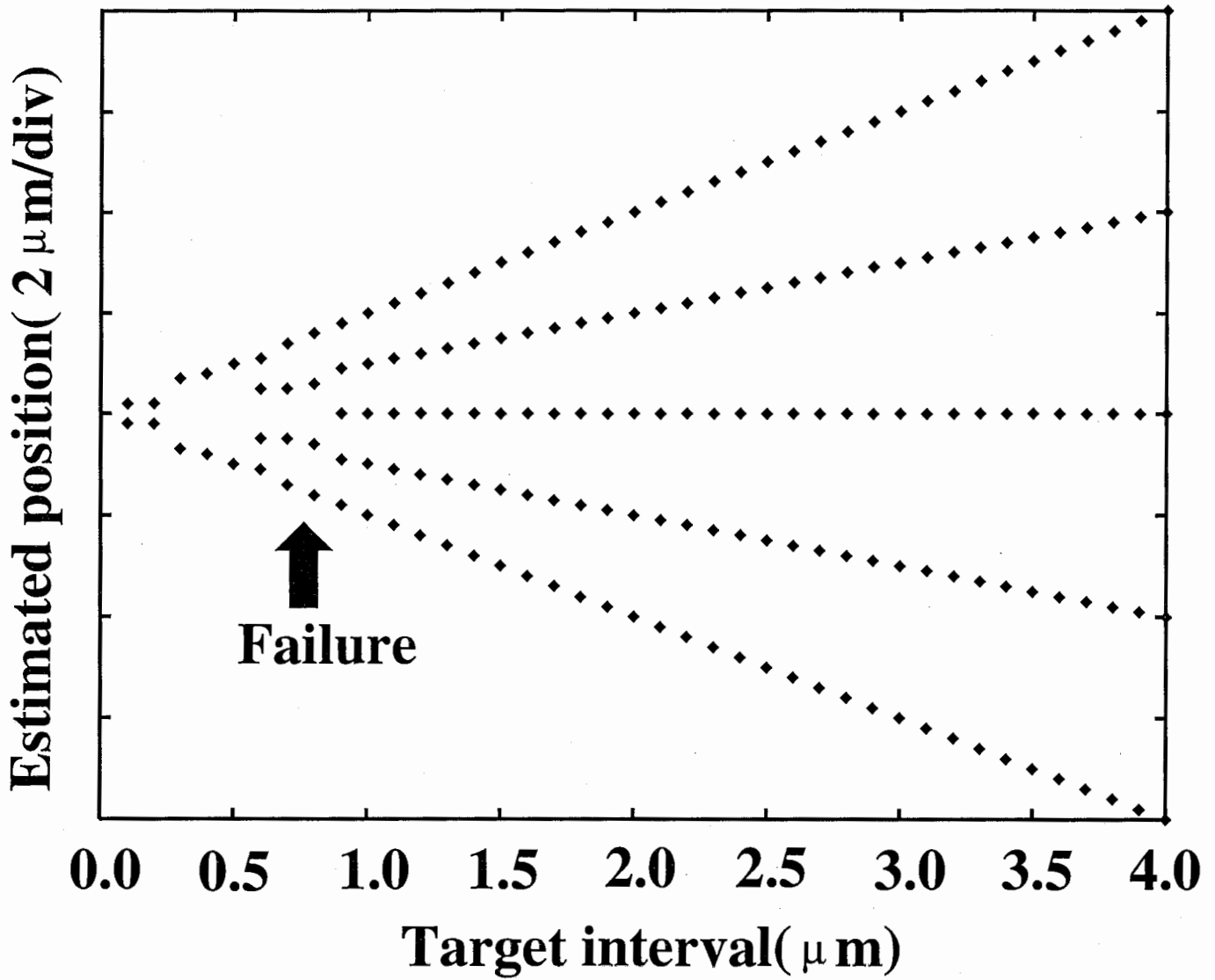


図4 : Gram-Schmidt 平均化法を用いた場合の  
反射点位置推定結果

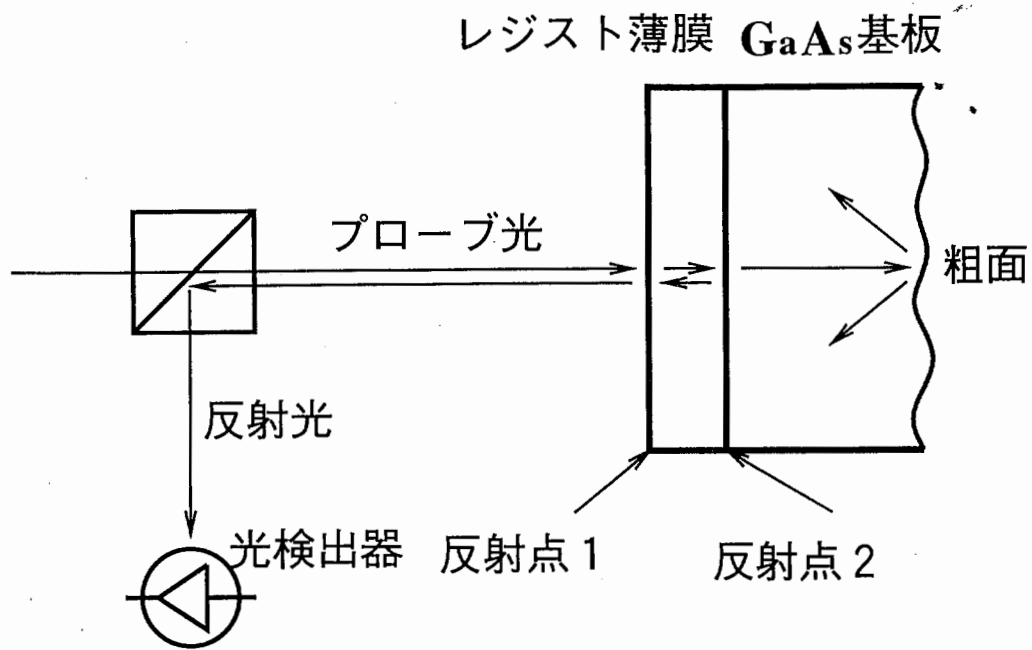


図5：分解能検証に用いた測定対象（レジスト薄膜）

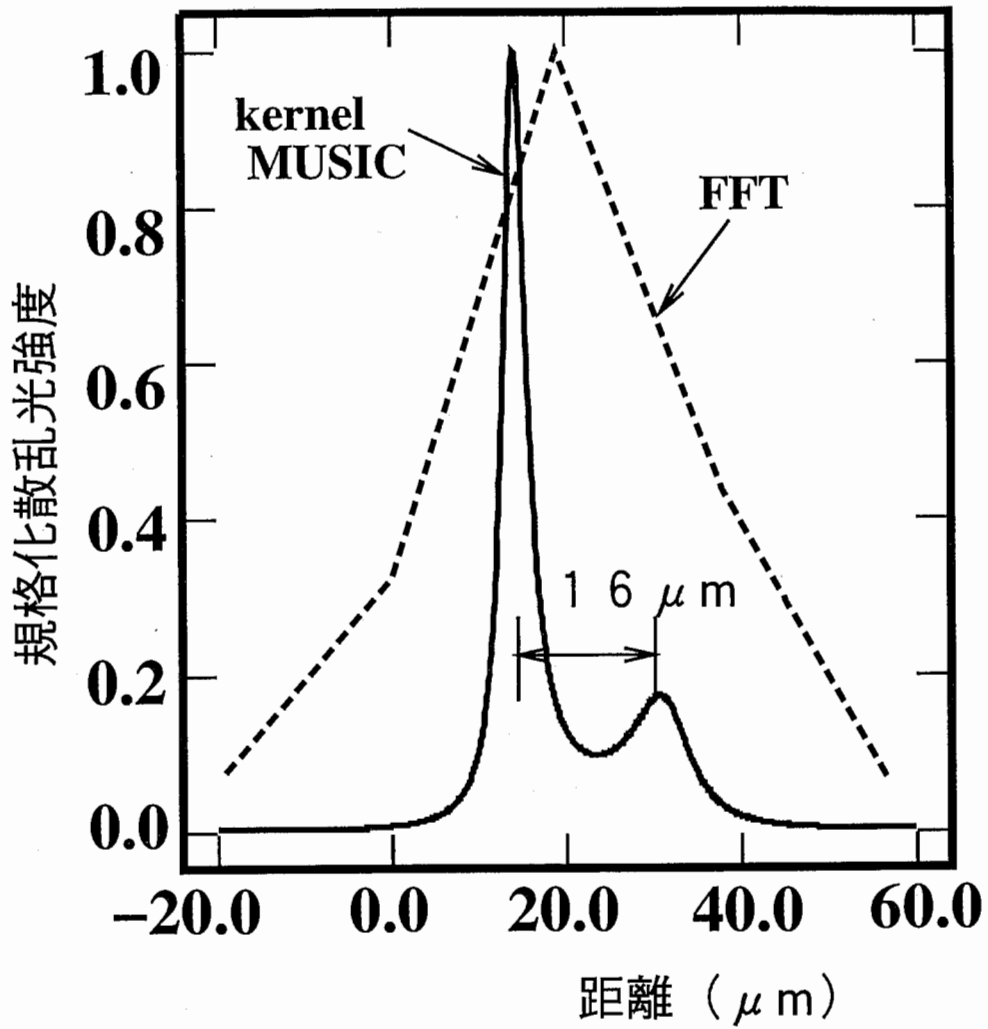


図6：測定結果例（膜厚16 μmの場合）