

TR-O-0102

29

カオスと量子現象
—メゾスコピック系とレーザー系—

原山 卓久

1996. 2.19

ATR光電波通信研究所

カオスと量子現象 – メゾスコピック系とレーザー系 –

ATR 光電波通信研究所

原山卓久

概要：古典力学系のカオスが量子現象に及ぼす効果は量子カオスとして知られている。量子カオスを応用することにより従来にない豊かな機能を持つ素子を実現する可能性をメゾスコピック系とレーザー系のモデルを用いて考察する。

目次

1	はじめに	2
2	量子カオス	3
2.1	カオス	3
2.2	量子カオス	4
2.3	半古典理論	5
3	メゾスコピック系	7
3.1	量子カオスとメゾスコピック系	7
3.2	リードの付いた卵形ビリヤード	7
3.3	リード付いた卵形ビリヤードの古典論	8
3.4	リード付いた卵形ビリヤードの量子論	8
4	レーザー系	10
4.1	量子カオスとレーザー系	10
4.2	リング共振器中の薄いレーザー媒質	10
5	おわりに	17
6	謝辞	19
7	参考文献	20

1 はじめに

決定論的力学系のカオスは、物理学を中心とした数多くの基礎的な研究により知見が積み重ねられ、さらに工学的な応用の試みも成功している(合原 1990, 1994)。カオスの量子力学版である量子カオスでは、基礎的な研究課題に難問が山積している段階であるが、既に解明されたことも多く、応用が模索できる時機にある(Eckhardt 1988, Giannoni et al. 1991)。本報告書では複雑な機能を持つ素子という応用を視野に入れた量子カオスの研究について述べる。

ニュートン力学のように決定論的な法則に従う系であっても、予測不可能な振る舞いを示し僅かに異なる初期条件により未来がまったく異なるということがある。古典力学系で起こるこのような現象を決定論的カオスという(Reichl 1992, Gulick 1992)。1960年代のコンピュータの発達とともに始まったカオスの研究は、1980年代後半には応用も提案され、従来の線形応答を越えたカオスによる複雑な非線形応答が積極的に応用されるようになった(合原 1994)。また、1970年代後半からはカオスが量子現象に与える影響に関しても研究されるようになった。そのような研究は量子カオスと総称されている。量子カオスは主に理論、あるいは数値計算により研究されていたが、磁場中の水素原子やマイクロ波による実験も行われ(Moore et al. 1994, Sridhar 1991)、1990年代になってメゾスコピック系を用いた実験も始まった(Bishop, Ecke & Mainieri 1995, Marcus et al. 1992)。また、量子カオス理論の中心的话题であるカオス系の半古典的量子化は、リーマン予想という数学上の未解決の大問題とも深く関係している。量子カオスの研究は基礎と応用の両側面で今後ますます重要性が高まると考えられる。

本報告書で量子カオス研究のために提案する具体的なモデル系はメゾスコピック半導体デバイスとレーザー発振である。メゾスコピック系の研究では最近の微細加工技術の進歩によりカオス系を作製し測定することが可能となり、カオスの影響を受けた量子現象が観測されている(Marcus et al. 1992)。また、カオス系をレーザー共振器として用いた場合、これまでに確立されたレーザー理論は適用できず、新しいレーザー発振が起こり得ることが期待できる。これらの系で期待される現象を明らかにすることは、基礎物理学の重要課題であるばかりでなく、従来にないまったく新しい機能を持つ素子の開発という点からも大変重要である。

第2章で量子カオスについてこれまでの研究動向を概観する。第3章では、メゾスコピック半導体デバイスのモデルとしてリードの付いた卵形ビリヤードを考え、主に数値的に解析する。第4章では、レーザー系のモデルとしてリング共振器中の薄いレーザー媒質を考え、解くべき方程式が非線形シュレディンガー方程式となることを示す。第5章でまとめと今後の課題について述べる。

2 量子カオス

古典力学系の概念であるカオスが量子現象に与える効果を解明する学問分野を量子カオスという。カオスは古典力学系で起こる現象であるが、非常に大きなエネルギー領域においては、対応原理により量子現象にも影響を及ぼすと考えられる。対応原理とは、ある系のエネルギーが十分大きいときには、その系に関する量子力学による記述と古典力学による記述とが同じ結果を与えるというものである。本章では、まずカオスと量子カオス及び量子カオス解明のカギとなる半古典理論について概説する。

2.1 カオス

カオスとは決定論的法則に従う系の未来が本質的に予測不可能になる現象である。決定論的法則とは、例えば天体の運動に関するニュートン力学のように時間発展に確率的な要因を含まない法則のことである。統計力学では大自由度系の予測不可能性という仮定を漠然とした根拠として用いる。しかし、予測不可能性の起源は自由度の大小ではなく系の非線形性にある。

例としてブランコの運動を考えてみよう。ブランコに乗っている人はじっとして、他に押す人がいることにする。また、空気などのエネルギーを減衰させるような抵抗はないものしよう。押す人が最初に一度ブランコを押すだけだと、一定の振幅と周期で振動し続ける。もっと大きく揺らしたいときには、ブランコが向うからこちらに戻って来てまた向うへ行こうとする瞬間に押してやるということをして繰り返せばよいことをわたしたちは経験的に知っている。これをやや物理的にいうならば、振動している物体にその周期と同じ周期で外力を与えると共振（共鳴）し、小さな力で大きな振幅を得ることができるということである。

ブランコは振幅が変化すると周期も変化する。したがって、完全に一定の周期で押し続けるときには、ある振幅では共振し、ある振幅では逆に揺れを弱め、長い時間の後、ブランコがどのように揺れることになるかは予測できなくなるのである (Arnol'd & Avez 1968)。2つのブランコが非線形な相互作用を及ぼし合うときには、一方から見れば他方は外力であるため同じような状況が生じる。

このように、非線形な相互作用が存在するときには、たとえニュートン力学のような決定論的法則に従う小数自由度の系であっても系の未来は予測不可能になることがある。すなわち、初期条件がほんの僅かに変化すると、長い時間の後にはまったく異なることが起きるのである。古典力学系の初期値に対する鋭敏性や予測不可能性は、ポアンカレなど数学者には古くから知られていたが他の分野の科学者には注目されていなかった。近年のコンピュータの発達により、決定

論に従いながらも複雑な運動をする現象が可視化されたことで、その重要性が広範な科学の分野で再認識され、カオスとして研究されるようになった(合原 1990, Gulick 1992)。

古典力学系のカオスは、散逸系のカオスと保存系のカオスとに大別される。前者はエネルギーの散逸を伴うためフラクタル構造のストレンジアトラクターを持つ。後者は系のエネルギーが保存されるのでアトラクターを持たない。両者とも数理的側面が詳しく研究され、気象、化学反応、天体などの自然現象でカオス理論を用いて初めて解明されたことも多い(Tabor 1989, Wisdom 1987)。さらに最近ではカオスを応用に活かした研究報告も多い(Davis 1992, Ott, Grebogi & Yorke 1991, 合原 1994)。

2.2 量子カオス

ブランコは人が乗れるくらいの大きさがあるので、普通は古典力学系として扱う。もし、これを量子力学系として扱っても、エネルギーが非常に大きければ古典力学の結果と一致するはずであるというのが対応原理である。したがって、エネルギーが十分大きいときには量子現象としてカオスの反映を見出せるだろうと期待できる。実際、数値計算や実験により量子現象におけるカオスの顕在化の例は1970年代の終わりから数多く発見されている(Berry 1983, Bohigas & Giannoni 1984, Eckhardt 1988)。その最も代表的なものは最近接量子準位間隔分布に現れるカオス系の普遍則である。

完全に未来が予測できるような系(可積分系)の最近接準位間隔分布はポアソン分布になる。ポアソン分布とは、飛行機事故のように非常にランダムかつ稀に起こる事象から導かれるものである。予測可能系では量子数が運動の恒量ごとに独立に決まり相関がないので、各エネルギーレベルにも相関がなくなるためポアソン分布になると考えられる。

これに対してカオス系の最近接準位間隔分布はウィーグナー分布になる(Bohigas & Giannoni 1984)。カオス系では運動の恒量が存在しないため、エネルギーレベルたちは独立には決まらず、相関を持つためこのような分布となる。これらの分布則は、系がカオスであるか可積分であるかということにのみ依存し、系の詳細にはよらない普遍則であることが重要である。

これらの普遍則は数値計算や実験では確認されているが理論的に厳密には解明されていない。特にカオス系に関してはまだ理論的アプローチ法が検討されている段階である。カオスや可積分といった概念は古典力学系のものである。したがって、カオスや可積分の量子現象への影響を知るには、量子現象を古典力学系の量を用いて記述することが必要である。可積分系に関してはそのようなことが可能である(Berry & Tabor 1977)。その理由は、可積分系には自由度の数だけの

運動の恒量が存在し、それを用いて系を量子化することができるからである。そのような半古典的な量子化法によって、可積分系の最近接準位間隔分布がポアソン分布になることはかなり明らかになってきている。これに対してカオス系にはそのような効果的な半古典量子化が存在せず、ウィーグナー分布をカオス系の普遍則として説明することは成功していない。カオスを示す古典力学系の量子力学を考えると、古典力学の情報だけで量子現象を記述することは量子カオス理論の最重要課題の1つである (Berry 1991)。

2.3 半古典理論

量子カオスの普遍則を解明するには、古典力学の世界の言葉を量子力学の世界の言葉に翻訳する理論が必要である。エネルギーが非常に大きいとき、作用に比べてプランク定数は非常に小さいので、この高次の項を無視するような半古典近似を用いるという方法が考えられる。このような半古典量子化法として、可積分系については量子力学の成立当初から EBK 量子化という方法が知られていた (Einstein 1917)。しかし、この方法は既に当時アインシュタインが指摘していたようにカオス系には適用できないのである。

カオス系を半古典的に量子化するという難問は、半世紀後にグッツヴィラーにより大きな進展を迎え形式的な解答が与えられた (Gutzwiller 1971, Balian & Bloch 1974)。可積分系でなくても古典力学の情報だけで半古典的に量子化できる方法—グッツヴィラーの跡公式—を見出したのである。しかし、この方法は古典力学系のすべての周期軌道を必要とするため、実際にこれを用いることは大変困難である。グッツヴィラーはその後 10 年の歳月を費やし、非等方ケプラー問題に彼自身の公式を数値的に適用し、カオス系を半古典的に量子化することに成功した (Gutzwiller 1982)。その後、1990 年代になって様々なカオス系がグッツヴィラー公式で半古典的に量子化され、厳密な量子力学の与えるエネルギーレベルを非常によい精度で近似できることが数値実験で明らかになった (Harayama & Shudo 1992a,b)。

一般のハミルトン系に対するグッツヴィラー公式は

$$\sum_n \delta(E - E_n) \approx \bar{d}(E) + \frac{1}{\pi\hbar} \operatorname{Re} \sum_\gamma \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_\gamma}{\sqrt{|2 - \operatorname{Tr} M_\gamma^k|}} \exp \left[ik \left(\frac{S_\gamma}{\hbar} - \frac{\nu_\gamma}{2} \pi \right) \right] \quad (2.1)$$

である。ここで $\bar{d}(E)$ は平均状態密度で、相空間にプランク定数の細胞が入る数で決まるトーマス—フェルミ近似で与えられ、相空間の大きさという古典系の量で決定される。 γ は素周期軌道を表し、 k はそれを繰り返す回数である。 $S_\gamma = \oint_\gamma pdq$ は軌道 γ にそって古典力学の作用、 T_γ は γ の周期である。 M_γ は軌道 γ の周りで線形化されたポアンカレ写像、すなわちモノドロミー行列である。また、 ν_γ は焦点の個数に関係したマスコフ指数である。これらはすべて古典力学系

としての情報である。式 (2.1) において、和はすべての素周期軌道について取る。それゆえ、この半古典量子化法は周期軌道量子化法とも呼ばれる。カオス系では、周期の長さと共に周期軌道の数も指数関数的に増大し、収束しないという困難が生じる。これまでこの公式を数値的に適用したすべての例は、この公式の各準位に対する解像度の低下を犠牲にして絶対収束級数にするといった類いの変形を行っている。しかし、そのような方法では、量子準位統計の普遍則を説明できるほど多くのエネルギー固有値を半古典的に得ることはできない。周期軌道量子化法をさらに実用可能なものとして完成させることが、カオス系の半古典量子化及び量子カオス理論の第一歩として最も重要である。そのために式 (2.1) の級数を並べ換えによって収束させようという様々な試みがなされている (Berry & Keating 1990, Cvitanovic & Eckhardt 1989)。

3 メゾスコピック系

ミクロのスケールのメゾスコピック半導体素子では、少数電子の量子現象を利用した動作を期待できる。そのような量子現象として量子カオスを考えたとき、カオスの持つ複雑で豊かな応答特性を積極的に利用する可能性を探る。

3.1 量子カオスとメゾスコピック系

半導体の微細加工技術の進歩により、電子の平均自由行程以下のスケールのデバイスを作製することが可能である。このような素子では、電子の運動はバリスティックで接合界面でのみ散乱されると考えられる。このような場合、電子の振る舞いは接合界面の形にのみ依存する。

このような系を古典力学系として考えた場合には、ビリヤード問題という数理物理の研究対象となる。ビリヤード問題の研究は長い歴史を持ち多くの知見が積み上げられている。特に、2次元のビリヤードでは物理的モデルにおけるエルゴード性（力学量の時間平均と空間平均とが等しいという性質）とカオス性が初めて厳密に示された (Sinai 1970)。さらにビリヤード系を量子系として扱う量子ビリヤード問題は、典型的な量子カオスの研究対象として理論及び数値計算により様々な角度から詳細に調べられている。(Harayama & Shudo 1992a,b, Shimizu & Shudo 1995, Gasperd & Rice 1988a,b,c)

また、GaAs-AlGaAs ヘテロ接合により、種々の形状のビリヤードが実際に作製され、その電気伝導特性などが測定され、量子カオスの効果が議論され始めている (Marcus 1992, Bishop, Ecke & Mainieri 1995)。現在の技術では、完全にバリスティックな輸送は望めないが、将来は1電子のカオティックビリヤードをメゾスコピック半導体素子として実現できる可能性がある。そのような技術を用いてどのような機能を持つ素子が期待できるかを量子カオスの知見を基に考察する必要がある。

3.2 リードの付いた卵形ビリヤード

量子カオスの理論的解明には2-3で述べたように半古典理論を用いて解析しなければならないが、半古典理論は未だその完成自体に多くの努力が注がれているのが現状であり、半古典論を用いてモデルを設計することはできない。ここでは、応用可能性も視野に入れた具体的なモデルを考案し、そのモデルを数値的に研究し動作を解明する。

メゾスコピック半導体デバイスのモデルとしてリードの付いた卵形ビリヤードを考える (図 3.1)。卵形ビリヤードは、あるパラメータを持ち、そのパラメータの値に依存してビリヤードの境界の形状が変化する。ビリヤード内の粒子の運動は壁の形に大きく左右される。したがって、このモデルはパラメータの変化に従い可積分系にもカオス系にもなるのである (Benettin & Strelcyn 1978)。また、パラメータの値によっては、予測可能な軌道と予測不可能な軌道が混在した弱いカオス系 (近可積分系) にもなる。したがってこの系を用いると、様々な古典力学的特徴を持つリードの付いたビリヤード系を系統的に研究することができるのである。特にこれまで詳しく研究されていない弱いカオスの古典的散乱現象とその量子現象に及ぼす効果を解明できることが重要である。

3.3 リード付いた卵形ビリヤードの古典論

リードの付いた系は開放系なので散乱カオスの研究により用いられる解析手法が適用できる。ここでは、滞在時間の分布と衝突パラメータの関係を考察し古典力学的な特徴を議論する。

まず、典型的な強いカオス系であるスタジアムビリヤードとなるようなパラメータの値を選んだ場合について考察する。図 3.2 のように電子の入射角度を固定し入射位置を鉛直方向に変化させて、ビリヤード内に入射してから外に射出するまでのビリヤード内滞在時間を調べた結果を図 3.3 に示す。グラフが平らに近く滑らかな部分は、入射位置を変えても滞在時間があまり変わらないことを示している。これに対して、グラフが大きく変化している部分は、入射位置を少し変えると滞在時間がまったく異なることを示している。このような部分は図 3.4 のように拡大しても激しく変化しており、その変化は無限に細かいフラクタル構造を持っている。このことから、ほんの僅かに違う位置から入射させた電子たちは、長時間後にはまったく異なる振る舞いをするのがわかる。このように、滞在時間の分布によってリードの付いたビリヤード系のカオスの特徴付けることができる。さらに、カオスの強さを滞在時間分布の激しく振動する部分と滑らかな部分の比によって表すことができる (図 3.5)。パラメータ δ の値が 0 のときスタジアム形となるが、このとき最も強いカオスとなることがこの図よりわかる。

3.4 リード付いた卵形ビリヤードの量子論

リードの付いた量子ビリヤード問題は次のようにモデルを設定する。リード 1 から電子が入射され、リード 1 あるいはリード 2 から出ていく。入射は連続して行われ定常状態に達している

とする。したがって、リード1、2が無限に長いとして、無限遠方での境界条件として、

$$\psi(x, y, n) = \phi_n(y) \cdot e^{ik_n(x+a)} + \sum_{m=1}^{\infty} S_{nm}^{(1)} e^{-ik_m(x+a)} \cdot \phi_m(y) \quad (3.1)$$

及び

$$\psi(x, y, n) = \sum_{m=1}^{\infty} S_{nm}^{(2)} e^{-ik_m(y+a')} \cdot \phi_m(x) \quad (3.2)$$

を満足する。ここで、

$$\phi_m(y) = \sqrt{\frac{2}{d}} \sin \left[\frac{n\pi}{d} \left(y + \frac{d}{2} \right) \right], \quad (3.3)$$

$$k_m = \sqrt{k_f^2 - \left(\frac{m\pi}{d} \right)^2} \quad (3.4)$$

である。また、 d はリードの幅である。ビリヤード台を A と表すと境界以外の部分に関しては、時間に依存しないシュレディンガー方程式

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \text{ in } A \quad (3.5)$$

とディリクレ条件

$$\psi(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \text{ on } \partial A \quad (3.6)$$

を満足するものとする。式(3.5)と(3.6)は境界要素法により数値的に解くことができる。これにより、フェルミエネルギーに対する透過確率がわかる。量子カオスの典型である束縛状態の量子準位統計に対応すると考えられる量は、共鳴散乱を与える入射(フェルミ)エネルギーの統計である。そのようなエネルギーでは、リードのない束縛状態の固有状態と共鳴するので、波動関数は固有状態に近いものになる。例として、完全な円のビリヤードの波動関数を図3.6に示す。また、ビリヤードの形状が完全な円の場合の共鳴散乱エネルギーの最近接間隔分布を図3.7に示す。明らかに点線で示したポアソン分布にもウィーグナー分布にも一致しない。円型ビリヤードは、完全可積分系であるが、リードが付いた場合、滞在時間分布(図3.8)からもわかるように可積分系ではなくなる。そのため、共鳴散乱を与えるエネルギーたちの間に相関が生じ準位が反発するため、ポアソン分布に一致しなくなると考えられる。しかし、滑らかな部分が多い滞在時間分布からわかるように強いカオスとはならないので、間隔0付近以外ではポアソン分布に近くなると考えられる。滞在時間分布から特徴付けたカオスの強さの変化と最近接間隔分布の変化との対応を明らかにすることが今後の課題である。

4 レーザー系

レーザーにおいてカオスが生じることはハーケンにより指摘された (Haken1975)。彼はストレンジアトラクターを持つことで有名な気象モデルのローレンツ方程式とレーザーの方程式が同等であることを示した。しかし、実際のレーザーで使われるようなパラメーターの値ではカオスは起こらないことも知られていた。光と物質の相互作用におけるカオスの最初の例は、光双安定系において池田により理論的に導かれた (Ikeda, Daido & Akimoto 1980)。ここでは、レーザー系と池田の方法を組み合わせ、新しいカオスレーザーモデルを提案する。

4.1 量子カオスとレーザー系

従来のレーザー理論は、共振器中の固有関数（定常状態の波動関数）をあらかじめ用意しておき、それらの固有関数の1つが発振することを導出するものである。共振器が直方体の箱のように、古典力学的に見たとき可積分系に属するようなものである場合には、自然放出から誘導放出により電場が強められていくとき固有関数と強調される軌道との対応が付くので、そのようなモード理論を理解しやすい。

しかし、固有関数と古典周期軌道とが対応が付かないようなカオス系の場合には、誘導放出と鏡の反射で強調されるのは固有関数ではなく周期軌道である。そのとき、発振が起こるならば、どのようなモードが立ち上がるかは明らかではない。量子化されたカオス系の固有関数は非常に複雑である (Shimizu & Shudo 1995, Heller 1984, Bogomolny 1988)。また、カオス系の周期軌道は非常に豊富であることが知られている (Harayama & Shudo 1992a, Sieber & Steiner 1989)。もし、固有関数や周期軌道でレーザー発振するならば、指向性が非常に多様になる。また、波長も変化に富んだものとなるので応用上も重要である。

このようにカオスを示すようなビリヤードを共振器とすると、従来のレーザーとはまったく異なる特性を持つレーザー発振が期待できる。

4.2 リング共振器中の薄いレーザー媒質

カオスを示すビリヤード形状のレーザー媒質におけるレーザー発振を考える。数値計算により解析を行うには、マクスウェル方程式と光ブロッホ方程式を解く必要がある。ここでは数値計算に要する時間を短くするために、レーザー媒質をリング共振器中に入れたモデルについて考察する (図 4.1)。このモデルでは、解くべき方程式は2次元のシュレディンガー方程式に単純化されることを以下に示す。

光の場合はミクロな電子の振る舞いに比べて十分マクロなものと考えてよいので、物質は量子力学で、電場は古典力学で記述される。現実の原子や分子は多くの量子準位を持っている。しかし、相互作用する光の振動数を ω 、プランク定数を \hbar としてレベルの差がその光子のエネルギー $\omega\hbar$ に最も近い2つのレベルを考えれば、原子の振る舞いを記述するには十分である。

これらのレベルの状態を $|+\rangle$ と $|-\rangle$ と表すと、原子の状態は

$$\psi = a|+\rangle + b|-\rangle \quad (4.1)$$

と書ける。ここで、

$$\sigma = 2ab^* \quad (4.2)$$

$$\sigma_3 = |a|^2 - |b|^2 \quad (4.3)$$

という2つの基本的な量が重要となる。電場を $\tilde{E}(\mathbf{r}, t)$ 、光速を c 、 N を原子数密度とすると、光と物質の相互作用は、マクスウェル-ブロッホ方程式

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \tilde{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c^2} dN \frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle \text{Re}(\sigma(\omega_0, \mathbf{r}, t)) \rangle \quad (4.4)$$

$$\dot{\sigma} = (-i\omega_0 - \gamma_{\perp})\sigma - i\mu\tilde{E}(\mathbf{r}, t)\sigma_3 \quad (4.5)$$

$$\dot{\sigma}_3 = -\gamma_{\parallel}(\sigma_3 - \sigma_{\infty}) + i\mu\tilde{E}(\mathbf{r}, t)(\sigma^* - \sigma)/2 \quad (4.6)$$

に従う。ここで μ は $2d/\hbar$ に等しく、 d は遷移双極子モーメントであり、遷移振動数 ω_0 の原子の σ を $\sigma(\omega_0)$ と書く。また、現実の原子は孤立しておらず、熱浴として作用する他の自由度とも結び付いている。熱浴は、孤立した原子の純粋な量子力学的な運動に複雑な形で摂動を加える。熱浴との相互作用による σ と σ_3 の緩和過程を現象論的に導入するために、式 (4.5) と (4.6) の右辺に緩和定数 γ_{\perp} と γ_{\parallel} を持つ緩和項を加えてある。

$\langle \dots \rangle$ は振動数の分布 $g(\omega_0)$ での平均

$$\langle \dots \rangle = \int d\omega_0 (\dots) g(\omega_0) \quad (4.7)$$

を表す。

多くの場合、原子系の遷移振動数 ω_0 は、一様ではなく、平均値 Ω のまわりに分布する。これにはいくつかの理由がある。媒質が気体であるとき、各原子は熱運動するので、電場の波数を k 、速さを v とすると、ドップラー効果のため、遷移振動数は kv だけ変化し、 $\omega_0 = kv + \Omega$ と

なる。原子の速さの分布はマクスウェル速度分布 $\propto \exp(-mv^2/2k_B T)$ (k_B : ボルツマン定数、 T : 温度、 m : 原子の質量) となる。したがって、

$$g(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\omega^*} \exp - \left[\frac{(\omega_0 - \Omega)^2}{\Delta\omega^{*2}} \right] \quad (4.8)$$

という分布の様々な振動数を持つ原子たちの寄与の和がマクロな分極になると考えられる。ここで、 $\Delta\omega^* = kv^*$, $v^* \equiv \sqrt{2k_B T/m}$ である。固体中の不純物原子も結晶の場により影響を受ける。この場の強さは各不純物原子ごとに異なるので、気体の場合と同様な ω_0 の分布となる。

電場は z 方向に伝播するとして、振動数 ω 、波数 k で激しく振動する成分 $e^{\pm i(\omega t - kz)}$ と、時空間の変化と共にゆっくり変化する包絡線成分 $E(\mathbf{r}, t)$ との積で

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, t) = \exp\{-i(\omega t - kz)\} E(\mathbf{r}, t) + c.c. \quad (4.9)$$

と表すことができる。ここで、 ω と k は分散関係

$$\omega = ck \quad (4.10)$$

を満足する。同様に、媒質の分極も 2 つの成分の積として

$$\sigma(\omega_0, \mathbf{r}, t) = \exp\{-i(\omega t - kz)\} \rho(\omega_0, \mathbf{r}, t) \quad (4.11)$$

と書ける。式 (4.11) をマクスウェル方程式に代入する。包絡線に対して、空間的には波長 $2\pi/k$ よりずっとゆっくりと、時間的には振動の周期 $2\pi/\omega$ よりずっとゆっくりと変化するという近似を用いると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{i}{2k} \nabla_{\perp}^2 \right) E(\mathbf{r}, t) = 2\pi i N d k \rho(\mathbf{r}, t) \quad (4.12)$$

となる。ここで、 $\nabla_{\perp}^2 = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$ である。作用素 ∇_{\perp}^2 が作用している項は、伝播方向に垂直な方向への回折の効果を表している。

また式 (4.11) をブロッホ方程式に代入すると右辺に $\exp \pm 2i\omega t$ という激しく振動する項が現れる。この振動項はあまりにも速い振動なので平均化されてしまい、 ρ や σ_3 のゆっくりした振る舞いには寄与しない。この項を無視する近似によりブロッホ方程式は

$$\dot{\rho}(\omega_0, z, t) = [i(\omega - \omega_0) - \gamma_{\perp}] \rho(\omega_0, z, t) - i\mu E(z, t) w(\omega_0, z, t) \quad (4.13)$$

$$\dot{w}(\omega_0, z, t) = -\gamma_{\parallel} (w(\omega_0, z, t) - w_{\infty}) + \frac{i\mu}{2} (E(z, t) \rho^*(\omega_0, z, t) - c.c.) \quad (4.14)$$

となる。ここで σ_3 を w と書いた。

マクスウェル方程式の右辺に減衰項を加える。これで半透明鏡からの光の漏れを扱う。このとき式(4.12)は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} - \frac{i}{2k}\nabla_{\perp}^2\right)E(r,t) = 2\pi i N d k \rho(r,t) - \sigma E \quad (4.15)$$

となる。ここで、 $-\sigma E$ は半透明鏡による漏れを表現するために用いた現象論的な項である。

まずリングに沿う方向のモードについて考察する。リングモデルの利点は、変数 E, ρ, ω に対して、周期境界条件

$$E(z,t) = E(z+L,t) \quad (4.16)$$

$$\rho(\omega_0, z, t) = \rho(\omega_0, z+L, t) \quad (4.17)$$

$$w(\omega_0, z, t) = w(\omega_0, z+L, t) \quad (4.18)$$

を課すことができるので、各変数をフーリエ級数に展開できることである。ここで L はリング共振器の光路の長さである。また、平面波も周期境界条件を満足するので、 ω と k の間には、

$$\omega = ck = c\frac{2\bar{n}\pi}{L} \quad (4.19)$$

という関係が成り立つ。ここで \bar{n} は整数である。 ω を決定する法則はないので、非一様に広がった遷移振動数の中心の振動数 Ω に最も近い値とする。

周期境界条件(4.16),(4.17)及び(4.18)により、すべての変数は完全直交系、つまり、リングに沿う縦モード

$$\psi_q(z) = \exp(iqz) \quad (4.20)$$

で展開できる。ここで、 n を整数として $q = 2n\pi/L$ である。

$$E(z,t) = \sum_q E(q,t)e^{-iqz}\psi_q(z) \quad (4.21)$$

$$\rho(\omega_0, z, t) = \sum_q \rho(\omega_0, q, t)e^{-iqz}\psi_q(z) \quad (4.22)$$

$$w(\omega_0, z, t) = \sum_q w(\omega_0, q, t)\psi_q(z) \quad (4.23)$$

と展開すると、マクスウェル-ブロッホ方程式は、

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}E(q,t) - \frac{i}{2k}\nabla_{\perp}^2 E = -\sigma E(q,t) + 2\pi N d k i \langle \rho(\omega_0, q, t) \rangle \quad (4.24)$$

$$\frac{d}{dt}\rho(\omega_0, q, t) = (i[cq + \omega - \omega_0] - \gamma_{\perp})\rho(\omega_0, q, t)$$

$$-i\mu \sum_{q_1+q_2=q} E(q_1, t)w(\omega_0, q_2, t)e^{iq_2ct} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}w(\omega_0, q, t) &= -\gamma_{\perp}(w(\omega_0, q, t) - w_{\infty}\delta_{q,0}) \\ &+ i\mu \sum_{q_1+q_2=q} (E(q_1, t)\rho^*(\omega_0, -q_2, t) \\ &\times (e^{-i(q_1+q_2)ct} - c.c.)) / 2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

となる。

原子系は定常状態に近いと仮定しよう。共振器の中で電場が強く励起されない限り、この仮定は正しい。そこで、 w を平衡値で置き換え、

$$w(\omega_0, q, t) = \delta_{q,0}w_{\infty} \quad (4.27)$$

とする。ブロッホ方程式を時間に関して積分して、

$$\rho(\omega_0, q, t) = (-i\mu) \int_{-\infty}^t e^{i[cq+\omega-\omega_0]-\gamma_{\perp})(t-s)} E(q, s)w_{\infty}ds \quad (4.28)$$

を得る。

ここで、電場は時間に関して非常にゆっくりと変化し、被積分項の中の $E(q, s)$ は $E(q, t)$ と置き換えてよいものとする、

$$\begin{aligned} \rho(\omega_0, q, t) &\approx (-i\mu E(q, t))w_{\infty} \int_{-\infty}^t e^{i[cq+\omega-\omega_0]-\gamma_{\perp})(t-s)} \\ &= \frac{i\mu}{i[cq+\omega-\omega_0]-\gamma_{\perp}} E(q, t)w_{\infty} \end{aligned} \quad (4.29)$$

となる。これを式(4.24)に代入すると、

$$\frac{d}{dt}E(q, t) = \alpha(\Delta q)E(q, t) \quad (4.30)$$

を得る。ここで、

$$\alpha(\Delta q) = \left[-\sigma + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi N\mu dk w_{\infty}}{\gamma_{\perp} - i(c\Delta q - x)} g(x) dx \right] c \quad (4.31)$$

$$c\Delta q \equiv cq + \omega - \Omega \quad (4.32)$$

$$x \equiv \omega_0 - \Omega \quad (4.33)$$

とした。 $cq + \omega$ は、モード q の振動数であるから、 $c\Delta q$ は、モード q と原子の振動数の分布の中心 Ω との差を表す。計算を簡単にするために、振動数の非一様な分布関数 $g(x)$ は、ローレンツ型

$$g(x) = \frac{\gamma^*}{\pi} \frac{1}{x^2 + \gamma^{2*}} \quad (4.34)$$

であると仮定する。 γ^* は不均一な広がりに対応した分布の広がり の緩和定数である。

式 (4.31) の右辺の $g(x)$ に関する平均化の計算が実行できて、

$$\alpha(\Delta q) = \left[-\sigma + \frac{2\pi N \mu d k w_\infty}{(\gamma_\perp + \gamma^*) - ic\Delta q} \right] c \quad (4.35)$$

となる。式 (4.30) の解は、

$$E(q, t) = \exp\{\alpha(\Delta q)t\} E(q, 0) \quad (4.36)$$

であるから、 $\alpha(\Delta q)$ の実部が正のとき、モード q は増大する。これはレーザー発振の初期仮定を記述している。このことから、 $\alpha(\Delta q)$ の実部はモード q のゲインを表すことがわかる。また、 $\alpha(\Delta q)$ の虚部は、モード q の真空における振動数 $cq + \omega$ からの、振動数の変化を示し、レーザー媒質の分散性の効果を表している。

$$\text{Re } \alpha(\Delta q) = c \left[-\sigma + \frac{2\pi N \mu d k w_\infty}{(\gamma_\perp + \gamma^*) + c^2 \Delta q^2} \right] \quad (4.37)$$

であるから、 Δq が 0 に近いほど、すなわち、媒質に共鳴するモードに近いほど増加は大きくなる。したがって $\Delta q = 0$ のモードだけが立ち上がるようにできることがわかる。

次にリングに沿う方向と垂直な方向の電場の時間発展に注目する。分極と電場の一般的な関係は、真空の誘電率 ϵ_0 、感受率 χ を用いて

$$P = \epsilon_0 \chi E \quad (4.38)$$

と書ける。したがって式 (4.12) は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{i}{2k} \nabla_{x,y}^2 \right) E(\mathbf{r}, t) = -\frac{i\epsilon_0 \chi}{2k} E(\mathbf{r}, t) \quad (4.39)$$

となる。ここで、時間と z 座標について

$$t - \frac{z}{c} = \tau \quad (4.40)$$

$$z = z' \quad (4.41)$$

という変換を行うと、

$$\frac{\partial}{\partial z'} E \left(\mathbf{r}, \tau + \frac{z}{c} \right) = \frac{i}{2k} \left(\nabla_{xy}^2 - \epsilon_0 \chi \right) E \left(\mathbf{r}, \tau + \frac{z}{c} \right) \quad (4.42)$$

となる。式 (4.37) において $\Delta q = 0$ となるような縦モードのみが発振するような場合を考える。厚さ l のレーザー媒質を通った後の電場は

$$E \left(x, y, l, \tau + \frac{l}{c} \right) = \left\{ 1 + l \frac{i}{2k} \left(\nabla_{xy}^2 - \epsilon_0 \chi \right) \right\} E(x, y, 0, \tau) \quad (4.43)$$

となる。リングを一周するとき獲得する位相は $\exp(ikL)$ であるから、

$$\left(x, y, l, \tau + \frac{l}{c} + \frac{L}{c}\right) = \left(x, y, l, \tau + \frac{l}{c}\right) \exp(ikL) \quad (4.44)$$

となる。 l が非常に薄い極限を考えると、

$$\frac{\partial E}{\partial \tau}(x, y, 0, \tau) = \frac{i}{2k} \left(\nabla_{xy}^2 - \epsilon_0 \chi\right) E(x, y, 0, \tau) \quad (4.45)$$

を得る。

したがって、非常に薄いレーザー媒質をリング共振器中においたとき、光の場の時間発展は非線形シュレディンガー方程式 (4.45) と媒質の境界条件により決定される。シュレディンガー方程式と境界条件が与えられるならば量子ビリヤード問題である。この系では光と物質との相互作用があるため非線形シュレディンガー方程式となっているので、量子カオスで知られているよりさらに複雑で豊かな現象が見られると期待できる。

5 おわりに

カオスの量子現象に及ぼす影響を解明する量子カオスを研究するためのモデルとして、リードの付いた卵形ビリヤードとリング共振器中の薄いレーザー媒質を提案した。前者はメゾスコピック半導体素子で、後者はレーザー系で実験も可能であり、基礎と応用を同時に研究することを目指している。

リードの付いた卵形ビリヤードに関しては、古典力学的特徴を衝突パラメータに対する滞在時間によって捉えた。円（可積分）のビリヤードでは衝突パラメータを変えても滞在時間はあまり変化しないのに対して、スタジアム（カオス）のビリヤードでは衝突パラメータのほんの僅かな違いで滞在時間は劇的に変化する。円とスタジアムの中間のような形のときには、滞在時間は衝突パラメータに対して滑らかに変化する部分と激しく変化する部分とがあるので、これらの比によってリードの付いたビリヤードにおけるカオスの強さを定義することが有効であることを示した。さらに量子ビリヤード問題を境界要素法により数値的に解き、リードのない束縛状態の固有状態に対応する共鳴散乱を与える入射エネルギーの最近接間隔分布を調べた。その結果カオスの強さと分布形状とに相関があることが明らかになった。ビリヤード台が円に近いときポアソン分布に近くなり、台がスタジアムに近いほどウィグナー分布に近くなる。特に円型ビリヤードでも、リードが付いたことによる軌道不安定性、及びリードとビリヤード台のつなぎ目部分の回折効果の影響で、共鳴散乱エネルギーは反発しポアソン分布とならないことは、滞在時間分布が完全に滑らかにならず激しく変化する部分を持つことと対応している。ポアソン分布でもウィグナー分布でもないような最近接間隔分布はブロディー分布で適当なパラメータの値を選んでフィッティングできる (Shimizu & Shudo 1995)。滞在時間分布により求めたカオスの強さとブロディーパラメータの関係を明らかにすることが今後の課題である。

リング共振器中の薄いレーザー媒質については、時間発展が非線形シュレディンガー方程式に従うことを示した。量子カオスはシュレディンガー方程式に従う現象であるから、この系では量子カオスの研究で発見されてきた現象よりさらに複雑な振る舞いが予想される。光と物質の相互作用を解析するには、マクスウェル-ブロッホ方程式を用いなければならず数値計算には膨大な時間が必要となる (Loudon 1972)。これに対して、われわれのモデルでは解くべき方程式が非線形シュレディンガー方程式に単純化されるため、理論的にも数値的にも解析が容易になる点が重要である。今後は媒質の形が円の場合など既に実験は行われているが理論的解明の進んでいないレーザーをシミュレーションし、その物理的機構を明らかにする。また量子カオスが観測されるような複雑な形状の媒質におけるレーザー発振を解明することが残された重要課題である。

量子カオスを理論的に解析するには、量子力学の世界の言葉を古典力学の世界の言葉に翻訳する半古典理論を用いる。カオスは古典力学の概念であるので、カオスの量子現象に対する影響を解明するには、古典力学の情報で記述された量子力学が必要となるのである。エネルギーが十分大きいときにはプランク定数が作用に比べて非常に小さいとして高次の項を無視する近似を用いて半古典理論を展開できる。しかし、カオス系に対する半古典理論は周期軌道の個数の指数関数的増大や周期軌道に関する知見の少なさなど様々な困難が山積しており、量子カオスの中心的话题となっている (Giannoni, Voros & Zinn-Justin 1991)。本報告書で扱った2つのモデルについても半古典的な解析が必要である。量子カオスの半古典理論はカオス系の半古典量子化やカオス系におけるトンネル現象といった物理の問題ばかりでなく、リーマンのゼータ関数など数論の問題にまで関係している (Berry 1986, 原山 & 首藤 1993)。われわれのモデルに関しても半古典理論による解析も進め、カオス系の半古典論の困難の克服に寄与することが期待される。

6 謝辞

日頃からご指導いただいている ATR 光電波通信研究所 猪股英行社長、渡辺敏英室長、ピーターデビス客員研究員に深く感謝いたします。また、メゾスコピック系の研究は早稲田大学牧野浩典氏との共同研究であり、レーザー系に関しては、ピーターデビス氏と立命館大学池田研介教授との共同研究に負っていることを付記します。

7 参考文献

- 合原編 1990 「カオス - カオス理論の基礎と応用」 (サイエンス社)
- 合原編 1994 「応用カオス」 (サイエンス社)
- Arnol'd, V.I. & Avez, A. 1968 'Ergodic Problems of Classical Mechanics' (Benjamin, NY)
- Balian, R. & Bloch, C. 1974 Ann. Phys. 85, 514
- Benettin, G. & Strelcyn, J.M. 1978 Phys. Rev. A 17, 773
- Berry, M.V. & Tabor, M. 1977 Proc. R. Soc. Lond. A 356, 375
- Berry, M.V. 1983 'Chaotic Behavior of Deterministic Systems' (North-Holland, Amsterdam)
- Berry, M.V. 1986 in: 'Quantum Chaos and Statistical Nuclear Physics' Lecture Notes in Physics, 1
- Berry, M.V. 1991 in: 'Chaos and Quantum Physics', eds. Giannoni, M.J., Voros, A. & Zinn-Justin, J. (North-Holland, Amsterdam)
- Berry, M.V. & Keating, J. 1990 J. Phys. A 23, 4839
- Bishop, A.R., Ecke, R.E. & Mainieri, R. 1995 Physica D 83 1-312
- Bogomolny, E.B. 1988 Physica D 31, 169
- Bohigas, O & Giannoni, M.J. 1984 Lecture Notes in Physics, 1
- Cvitanovic, P. & Eckhardt, B. 1989 Phys. Rev. Lett. 63, 823
- Davis, P. 1992 「光カオスの応用」 合原編「応用カオス」, 149
- Eckhardt, B. 1988 Phys. Rep. 163, 205
- Gasperd, P & Rice, S.A. 1988a J. Chem. Phys. 90, 2225
- Gasperd, P & Rice, S.A. 1988a J. Chem. Phys. 90, 2242
- Gasperd, P & Rice, S.A. 1988a J. Chem. Phys. 90, 2255
- Giannoni, M.J., Voros, A. & Zinn-Justin, J. 1991 'Chaos and Quantum Physics' (North-Holland, Amsterdam)
- Gulick, D. 1992 'Encounters with Chaos' (McGrawhill)
- (前田 & 原山訳「カオスとの遭遇 - 力学系への数学的アプローチ -」 (産業図書))
- Gutzwiller, M.C. 1971 J. Math. Phys. 12, 343
- Gutzwiller, M.C. 1982 Physica D 5, 183
- Haken, H. 1975 Phys. Lett. 53, 77
- Harayama, T. & Shudo, A. 1992a J. Phys. A: Math. Gen. 25, 4595

- Harayama, T. & Shudo, A. 1992b Phys. Lett. A 165, 417
- 原山 & 首藤 1993 物性研究 61, 222
- Haken, H. 1975 Phys. Lett. 53, 77
- Heller, E.J. 1984 Phys. Rev. Lett. 53, 1515
- Ikeda, k., Daido, H. & Akimoto, O. 1980 Phys. Rev. Lett. 45, 709
- Loudon, R. 1972 'Quantum Theory of Light'(Oxford University Press)
- Marcus, C.M., Rumberg, A.J., Westervelt, R.M., Hopkins, P.F. & Gossard 1992 Phys. Rev. Lett. 69, 506 Moore, F. L., Robinson, J.C., Bharucha, C., Williams, P.E., & Raizen, M. G. 1994 Phys. Rev. Lett. 73
- Ott, E., Grebogi, C. & Yorke, J.A. 1991 Phys. Rev. Lett. 64, 1196
- Reichl, L.E., 1992 'The Transition to Chaos' (Springer, Berlin)
- Shimizu, Y & Shudo, A. 1995 Chaos, Soliton & Fractals 5, 1337
- Sieber, M. & Steiner, F. 1989 Physica D 44, 248
- Sinai, Ya. G. 1970 Russ. Math. Surv. 25, 137
- Sridhar, S. 1991 Phys. Rev. Lett. 67, 785-788
- Tabor, M. 1989 'Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics' (John Wiley and Sons, New York)
- Wisdom, J. 1987 Icarus 72, 241

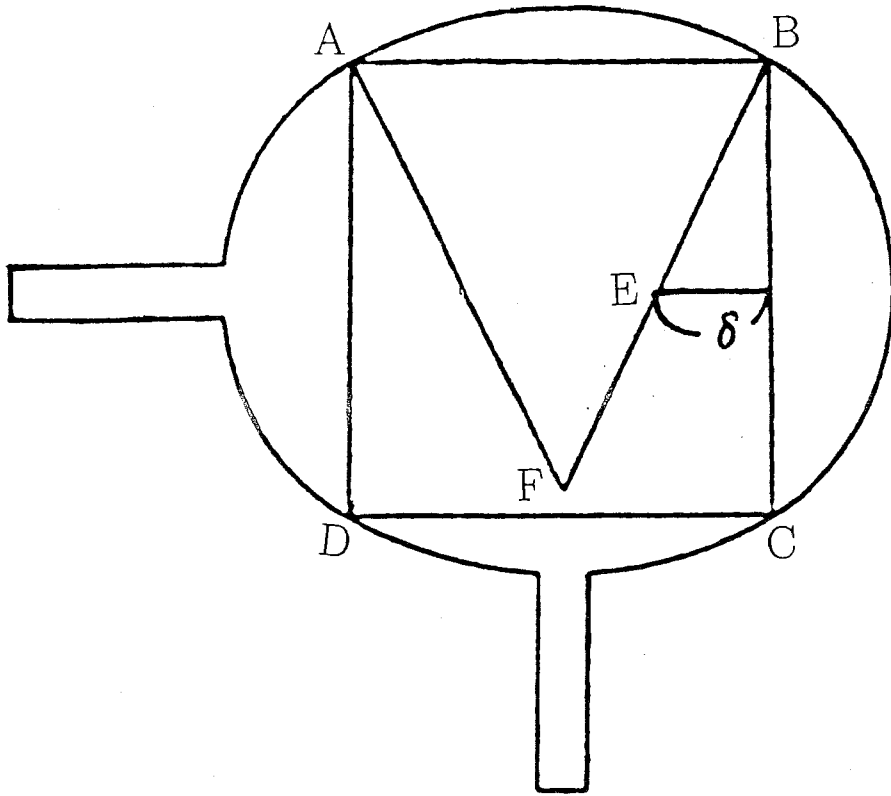


図 3.1 卵形ビリヤード

まず、正方形 ABCD を描き、辺 BC の中点から距離 δ の点 E を中心として円弧 BC を描く。次に点 F を中心に円弧 AB を描く。

衝突パラメータ

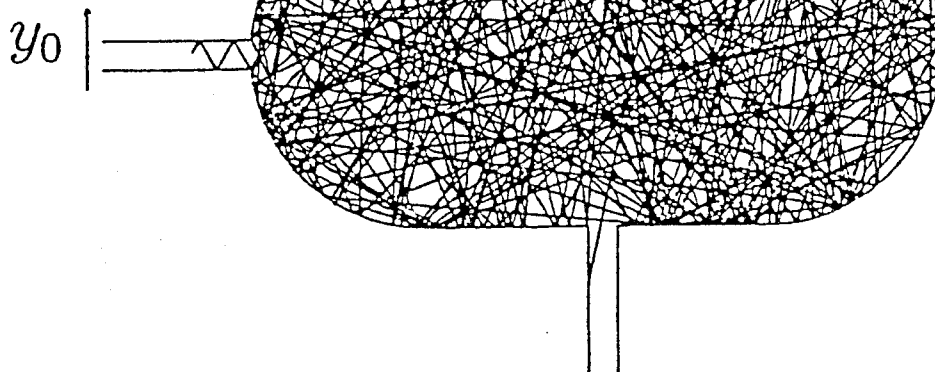


図 3.2 衝突パラメータ

図 3.3 衝突パラメータと滞在時間の関係

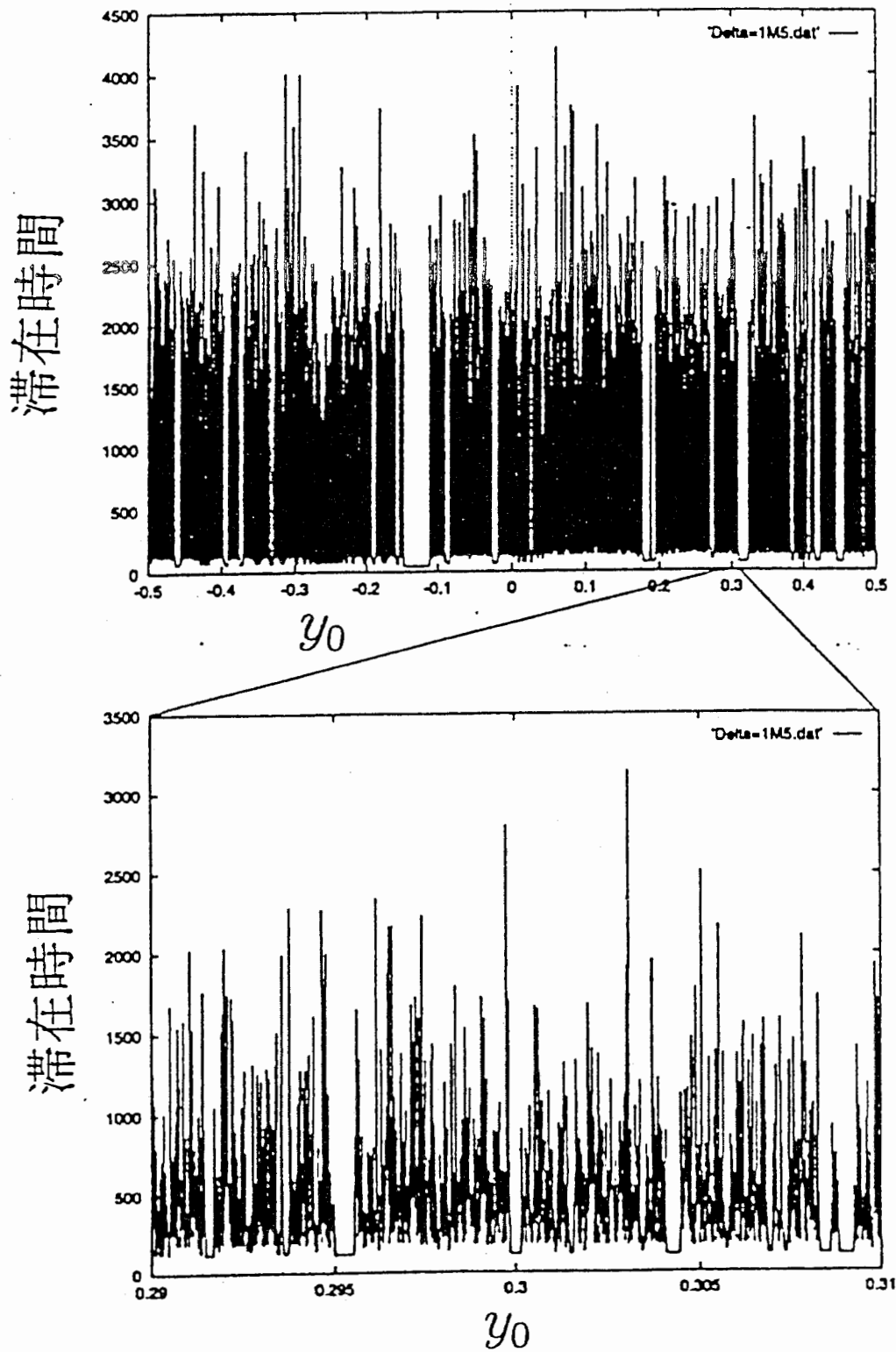


図 3.4 図 3.3 の拡大図

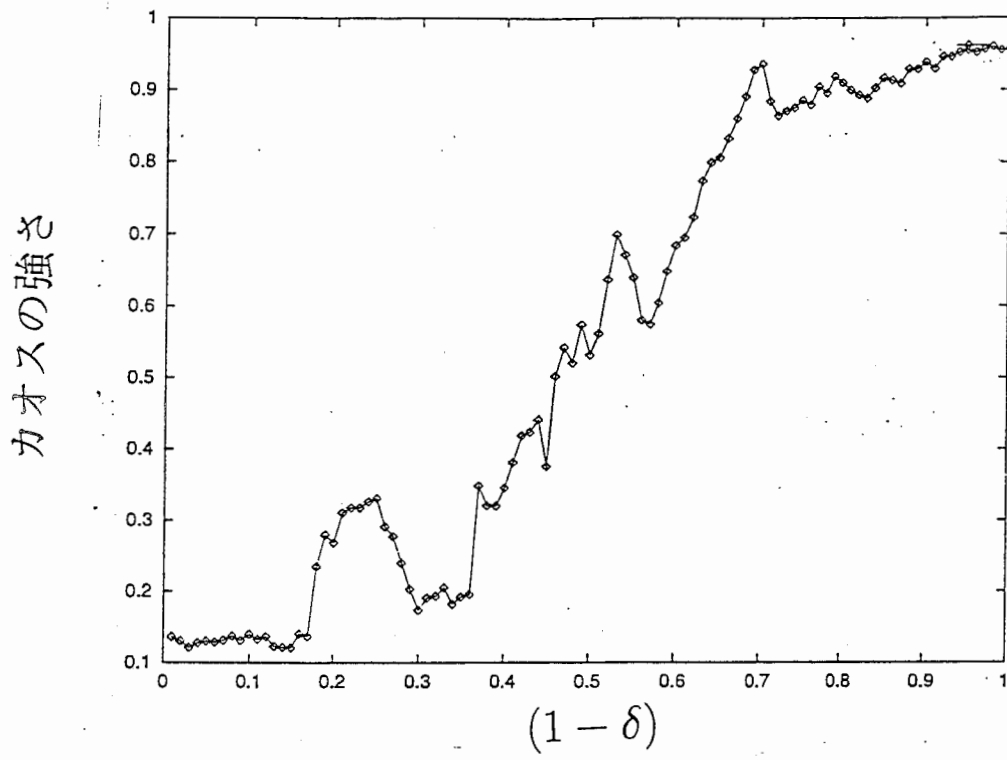


図 3.5 ビリヤードの形とカオスの強さの関係

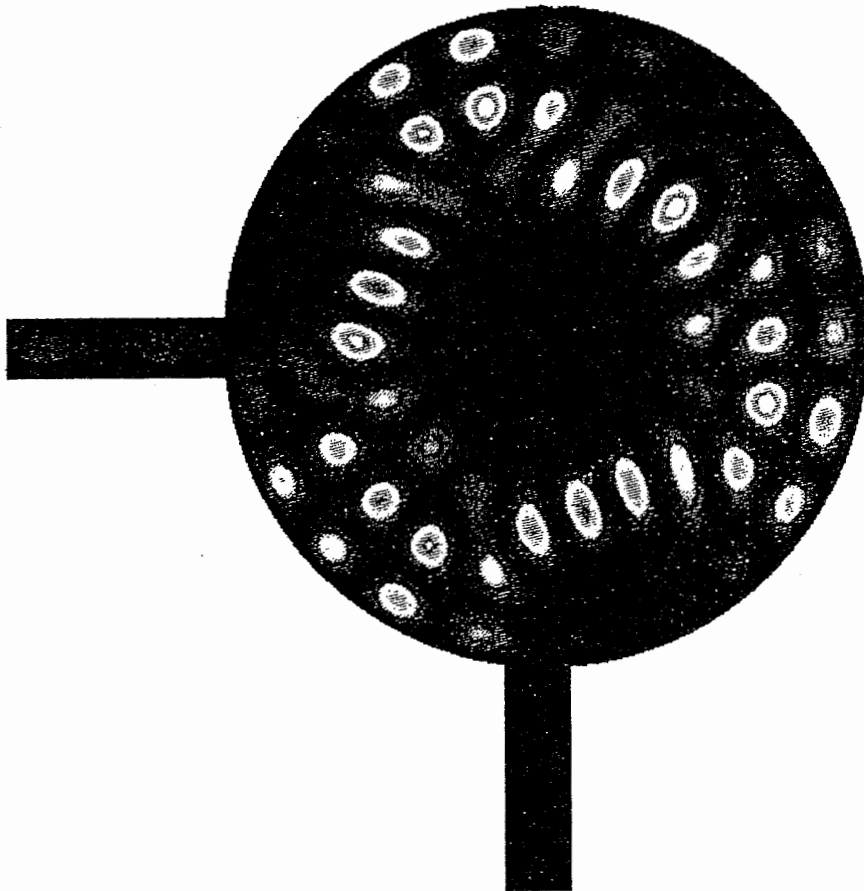


図 3.6 ビリヤード台が完全な円の場合の存在確率

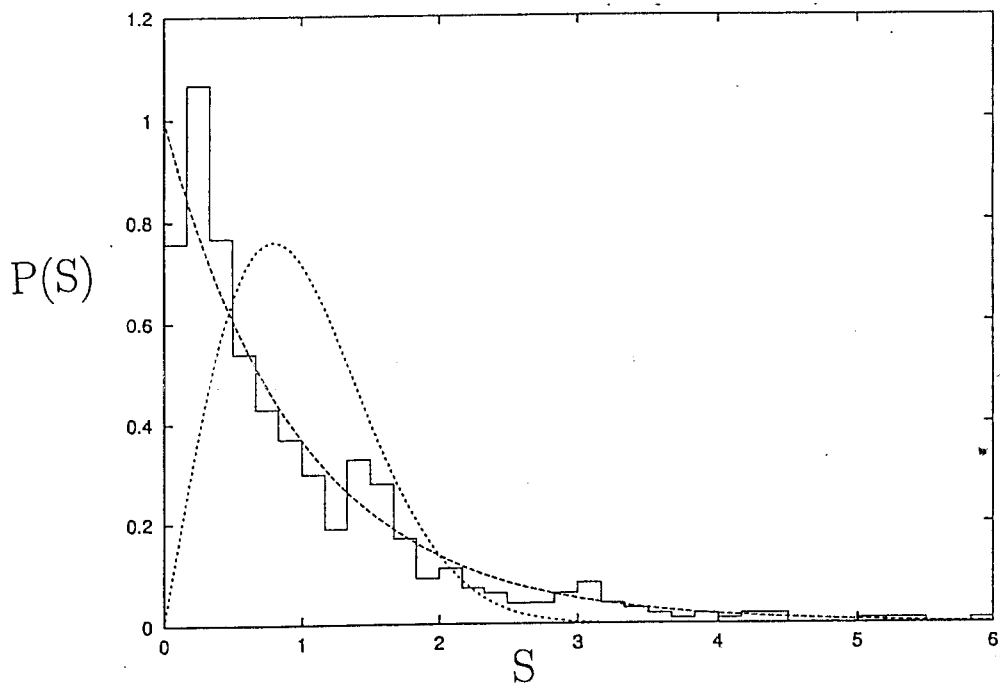


図 3.7 円形ビリヤードの共鳴散乱エネルギーの最近接間隔分布

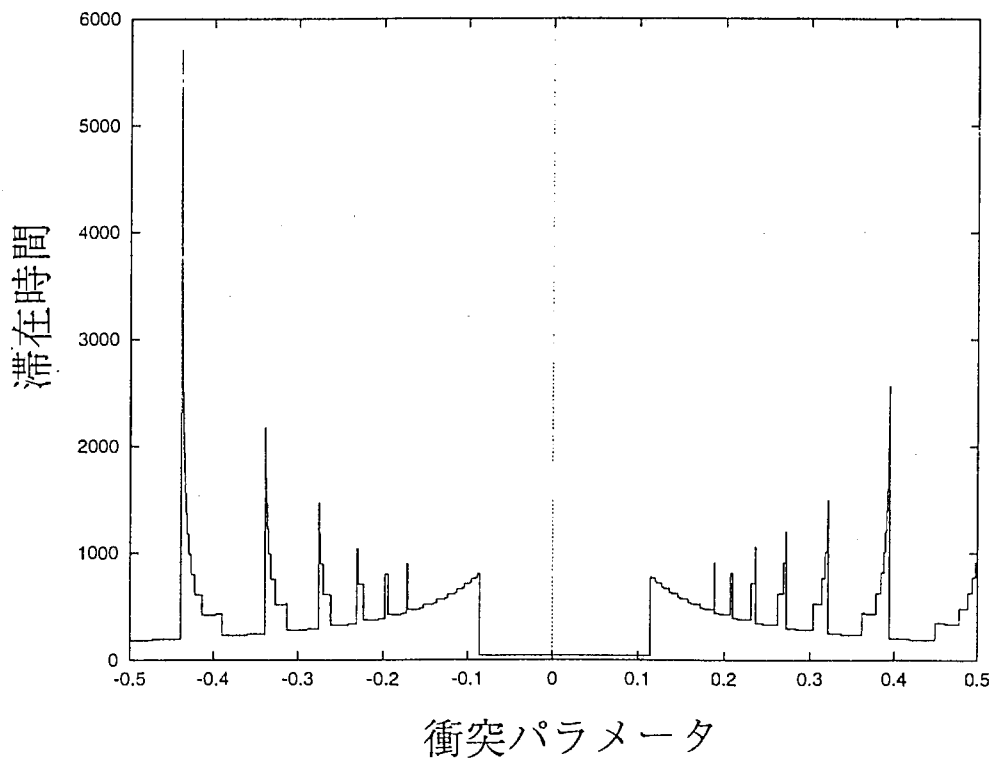


図 3.8 ビリヤード台が完全な円の場合の滞在時間分布

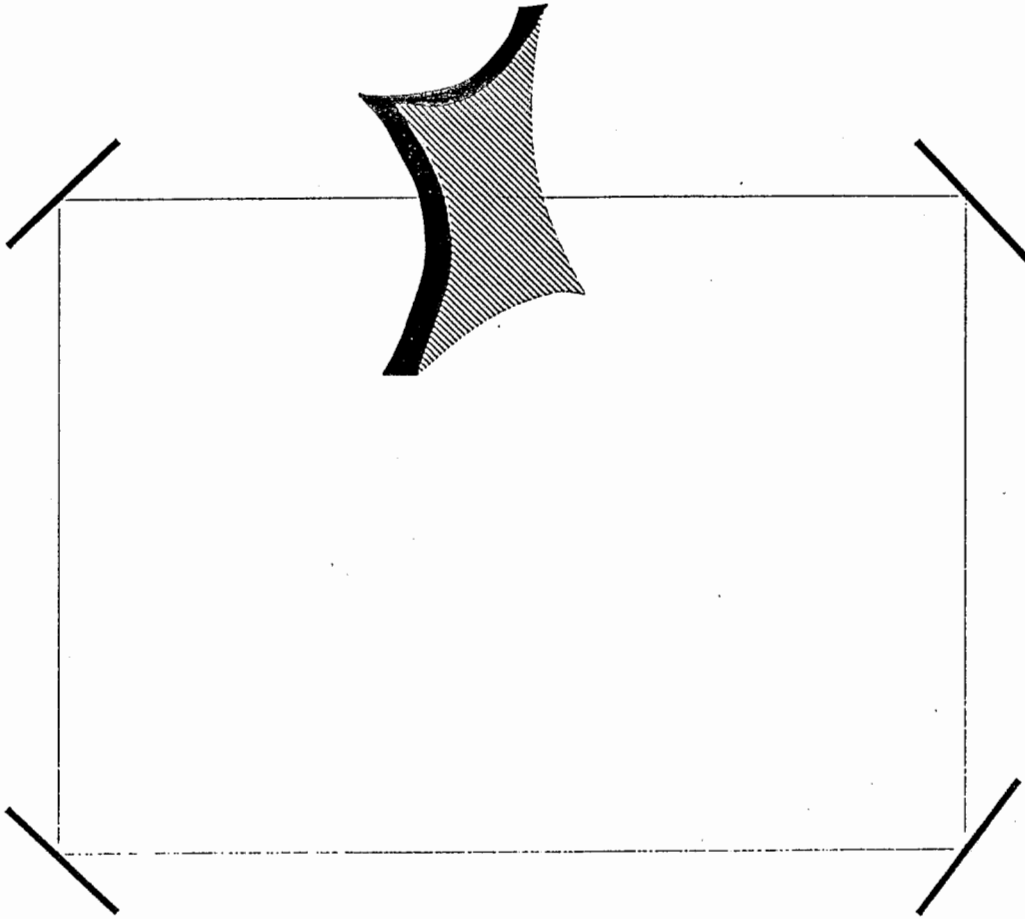


図 4.1 リング共振器中の薄いレーザー媒質