

TR-O-0046

23

移動体衛星通信用DBFアンテナ信号処理部の構成とその特性

大滝 幸夫

1992. 6. 3

ATR光電波通信研究所

# 移動体衛星通信用DBFアンテナ信号処理部の構成とその特性

(株)エイ・ティ・アール光電波通信研究所  
無線通信第一研究室

大滝 幸夫

## あらまし

本報告は、移動体衛星通信の移動局アンテナに適用できるデジタルビームフォーミング(DBF)アンテナに関して、アンテナビーム形成及び変復調処理を効率良く行うための送信及び受信用信号処理方式について検討を行い、実験的にその動作を確認した結果を述べている。

第1章では、本研究の背景について述べる。

第2章では、送信用DBFアンテナの信号処理方式に関して、アンテナビーム形成及び変調処理を効率良く行うための信号処理方式を示し、この機能を実現するために複数のデジタル信号処理用プロセッサ(DSP)を用いて試作した信号処理部の構成を述べる。

第3章では、受信用DBFアンテナの信号処理方式に関して、アンテナビーム形成及び復調処理を効率良く行うための信号処理方式を示し、送信用信号処理部と同様に、複数のDSPを用いてこの機能を実現した受信用信号処理部の構成を述べる。

第4章では、試作した送受信信号処理部の処理機能を確認するために、変復調実験、L帯平面アレー及びコンフォーマルアレーを用いたアンテナビーム形成実験を行った結果を述べ、これらの処理が実時間に行えることを示す。

第5章では、本研究のまとめとして、得られた結果を総括し、今後の課題を述べる。

# 移動体衛星通信用DBFアンテナ信号処理部の構成とその特性

## 目次

第1章	まえがき	1
第2章	送信用DBFアンテナ信号処理部の構成	3
第3章	受信用DBFアンテナ信号処理部の構成	6
第4章	試作信号処理部を用いたDBFアンテナの特性	9
4.1	変復調実験結果	9
4.2	ビーム形成実験結果	14
第5章	むすび	18
	謝辞	18
	文献	19
付録A	送信用信号処理の演算量	21
付録B	受信用信号処理の演算量	23
B-1	ビーム形成の演算量	23
B-2	復調処理の演算量	24
B-2-1	搬送波位相補正	24
B-2-2	クロック再生	29

## 第1章 まえがき

アレーアンテナの一形態として、デジタル信号処理技術を用いてアンテナのビーム制御を行うデジタルビームフォーミング(Digital Beam Forming, 以下DBF)アンテナが検討されている(1),(2)。これまでDBFアンテナは主にレーダシステムに使われ発展してきたが、近年、移動体衛星通信における移動局用アンテナへの適用の観点から図1に示すようなDBFアンテナが注目されている(3),(4)。DBF技術を用いると信号の振幅や位相を精度良く制御できるので、アクティブ回路を含めたパターン補正、較正、衛星追尾、アダプティブな干渉波の抑圧等の機能を持つ移動局用アンテナの実現が可能となる。このようなDBFアンテナを移動体衛星通信に用いる際には、良好な通信品質を確保するために常に衛星を追尾したビーム走査機能が受信のみならず送信用DBFにも要求され、レーダや陸上移動通信では必要のない送信用DBF部の構成が問題となる。また、受信用信号処理部においては搬送波再生及びクロック再生が必要となり、受信用DBF部と復調処理部の整合をいかにとるかという問題が生ずる。この点については陸上移動通信用DBFアンテナの開発において、蓄積一括復調処理方式が採用されている(5),(6)。しかし、取り扱うアレーのアンテナ素子数が陸上移動通信の4素子程度(5),(7)に比べて、移動体衛星通信では16~19素子程度と多い。また、送受信間の伝搬距離が非常に長いため、回線設計上、アレーアンテナ部においてCN比を十分かせぐ必要がある。従って、アレーアンテナとして十分利得を上げた状態で復調処理を行う必要性がある。

本文では、まず移動体衛星通信に適するDBFアンテナの信号処理方式について検討を行い、処理効率の観点からも効果的な送信及び受信用信号処理方式を明らかにする。次に、この方式に基づいた信号処理部を複数のデジタル信号処理用プロセッサ(Digital Signal Processor, 以下DSP)を用いて試作し、実時間でのビーム形成及び変復調機能の確認を行う。また、この信号処理部を用いた平面アレー及びコンフォーマルアレーアンテナのビーム形成実験により、精度良く所望の方向にビームが形成できることを示す。

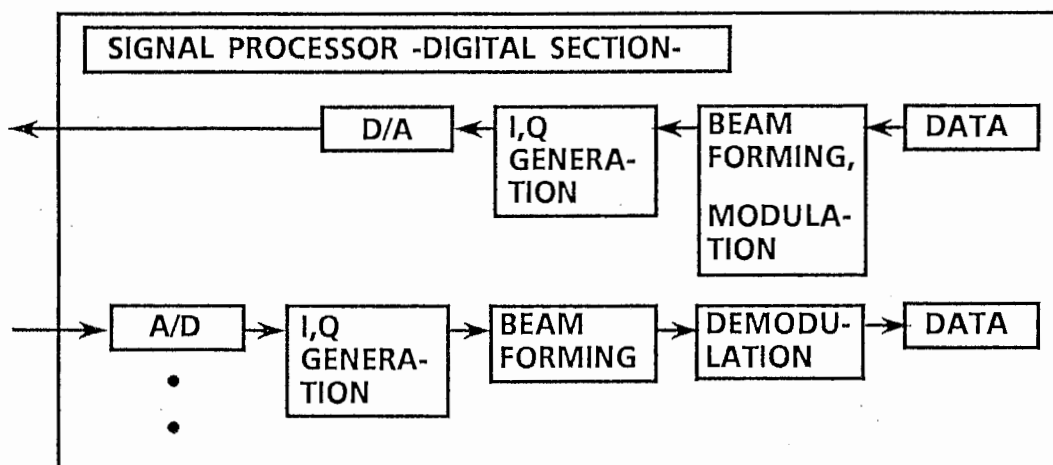
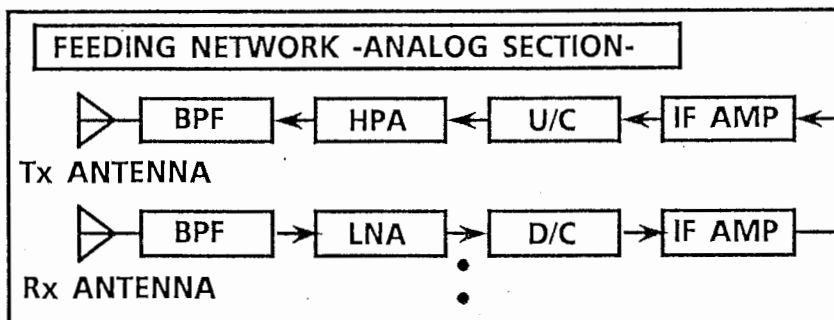
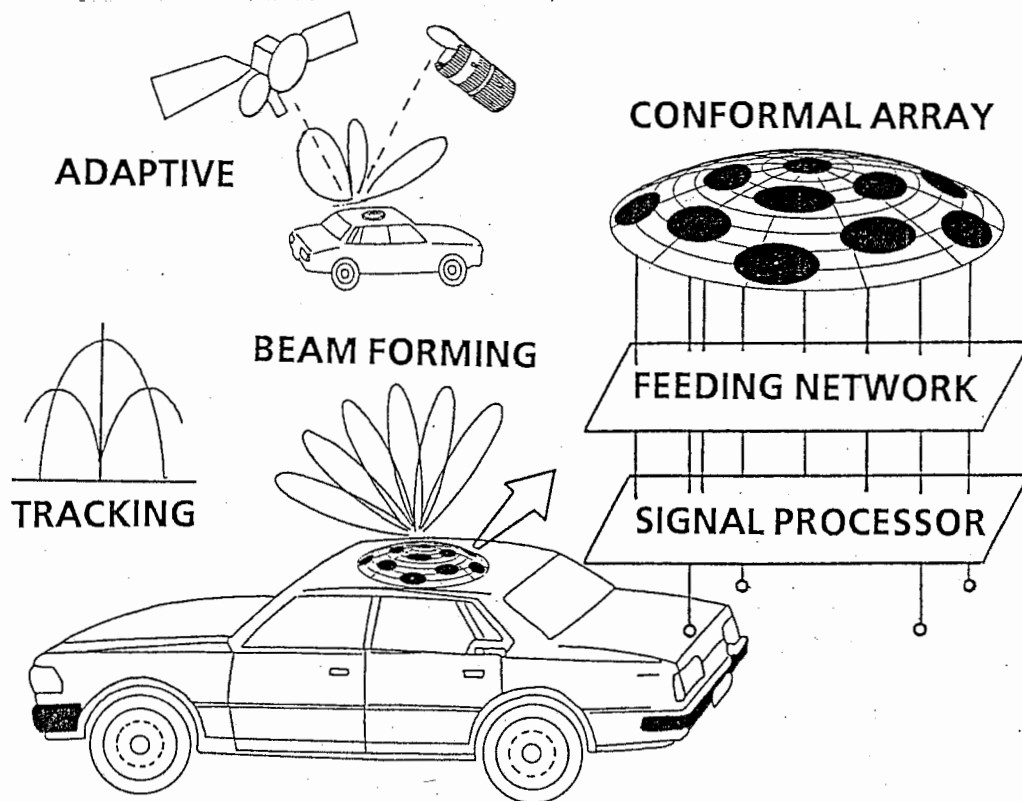


図1 移動体衛星通信DBFアンテナの概念

## 第2章 送信用DBFアンテナ信号処理部の構成

PSK信号を変調波とする場合の送信用DBFアンテナの信号処理部の基本構成を図2に示す。図中②~④部は移相器を挿入する箇所の候補を示す。また、 $N$ はアンテナ素子数を示す。送信用の信号処理部では搬送波再生及びクロック再生の必要がないので、ビーム形成と変調を一体化して処理することができる。図2の構成において、ビーム形成に必要な移相機能は以下に示す3つの典型的な方式により実現される(8), (9)。

方式I: ベースバンド信号発生直後で移相操作を行う(図2②部に移相器を挿入することに相当)。

方式II: 送信フィルタの出力直後で移相操作を行う(図2③部に移相器を挿入することに相当)。

方式III: 局部信号の移相操作を行う(図2④部に移相器を挿入することに相当)。

ここで、所望の方向に1つの固定ビームを形成するものとし、そのためのアンテナ素子毎の移相量は既知としている。また、局部信号(LO信号)発生器ではプロセッサのメモリテーブルを参照してLO信号を発生させるものとする。

方式Iではシンボルレート $f_b$ に比例した積和演算量が必要となるのに対し、方式II、IIIではサンプルレート $f_s$ に比例した演算量が必要となる。シンボルレートとサンプルレートの関係は $4 \times f_b \leq f_s$ であるから、方式Iでは他と比較し少ない演算量で済むことが容易に分かる。方式IIIでは所望移相精度に応じて作成されたLO信号テーブルのデータを直接参照することによっても移相操作を行うことができる。しかし、テーブルのデータ容量が大きくなるのでプロセッサのメモリ利用効率が悪くなる欠点がある。以上より、方式Iの移相方式が信号処理の効率の点から有効であることが分かる。なお、方式Iによる送信用信号処理方式とした場合に必要となる素子毎の演算量を付録Aにまとめておく。

方式Iによる送信DBFを実現するために、複数のDSPを用いて16チャンネル制御可能な送信用DBF信号処理部を試作した。図3にその信号処理部を用いたDBFアンテナの構成を示す。中心となるプロセッサ(DSPボード上)はAT&T社のDSP32Cである(10)。DBF/ModユニットはDSPボード、2チャンネルアナログ出力ポートを有する14ビットD/Aボード(D/A)、クロックボード(CLK)、2つのDSPボード間のデータ転送用の16ビットパラレルI/Oボード(P-I/O)から構成される。試作した送信アレーアンテナ用信号処理部では、1つのDBF/Modユニットで2チャンネルの処理を行う構成とし、送信用信号処理部は8個のDBF/Modユニット、1つのTxProcユニット、クロックユニットにより構成した。TxProcユニットはD/Aボードを除けばDBF/Modユニットと同じ構成である。クロックユニットはTxProcおよびDBF/Modユニットに、P-I/Oを介した転送データ及びD/A出力の同期に用いる共通のタイミングクロックをクロック分配器を介して供給する。

このような処理部の構成で、まず固定ビームを形成するためのアンテナ素子毎の位相は予めパーソナルコンピュータより所定のDSPに転送される。また、変調データはTxProcユニットからDBF/ModユニットへP-I/Oを介して転送される。個々のDBF/Modユニットでは前段のDBF/Modユニットから変調データを受信し、引続き後段のDBF/Modユニットに送信した後に、2チャンネル分のビーム形成(先に述べた信号処理方式Iに基づく)及び変調処理を行う。その演算結果がD/Aボードに転送される。全てのDBF/Modユニットではこれら一連の演算がパイプライン処理により行われ、全DSPに共通して供給されるクロックに同期してアナログ出力が確定される。D/Aの出力信号はD/A変換同期用クロックの周波数成分をろ波した後、アップコンバータ(U/C)で送信周波数に変換されアンテナ部に給電される。

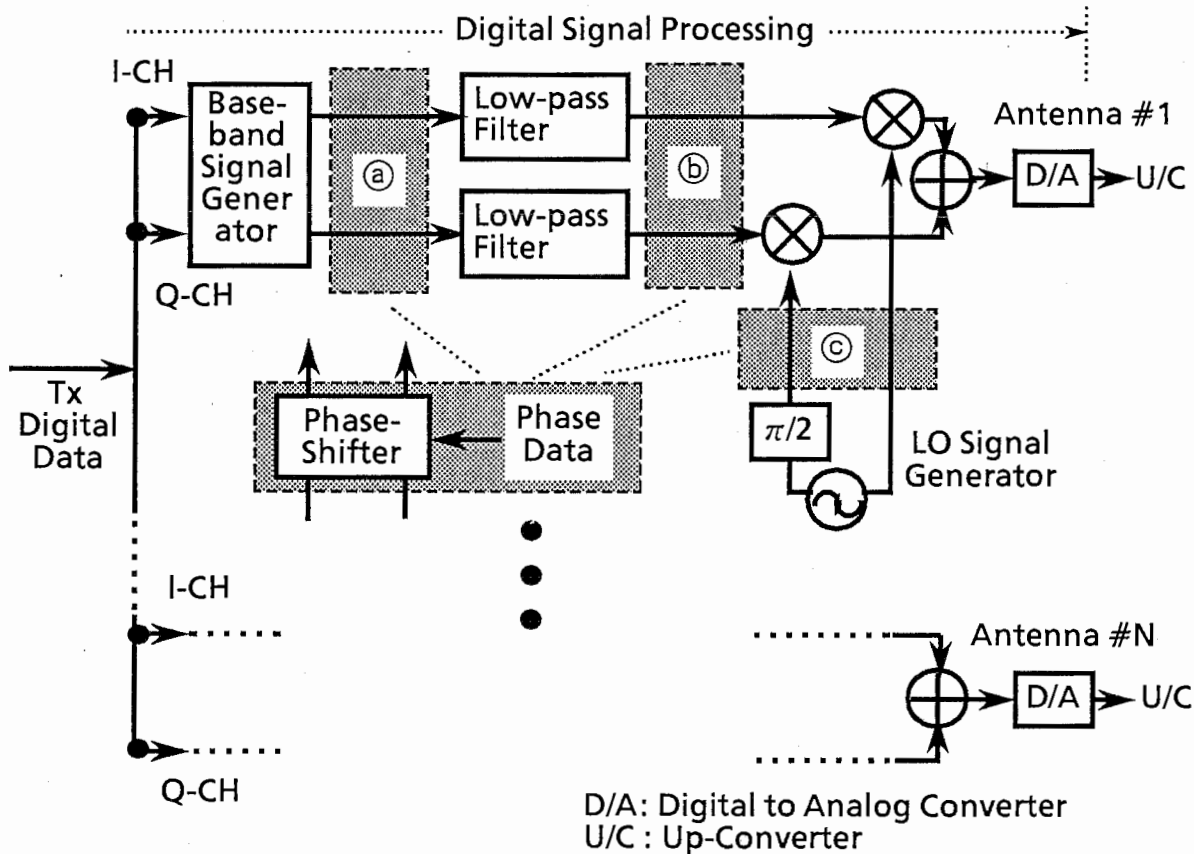


図2 送信用DBF信号処理部の構成



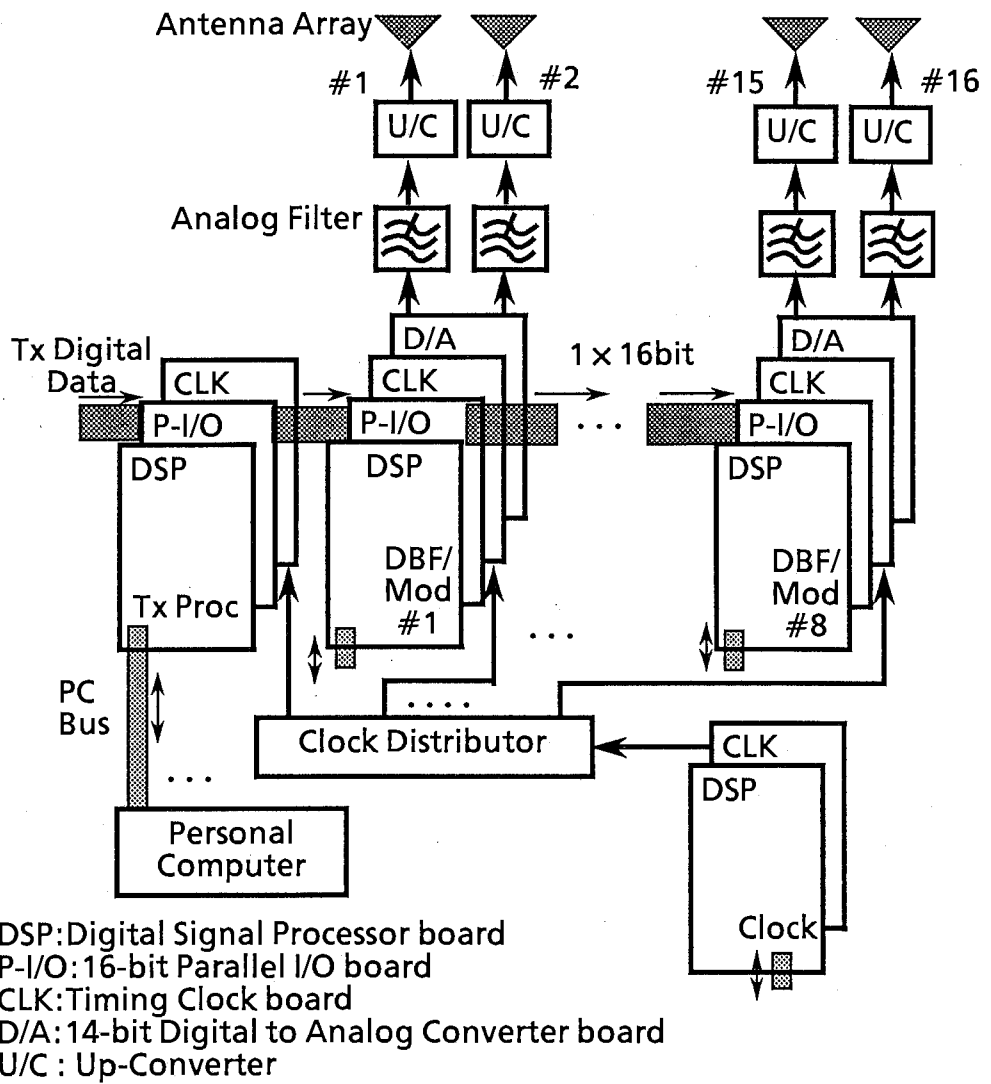


図3 試作送信用DBFアンテナの構成

### 第3章 受信用DBFアンテナ信号処理部の構成

図4にPSK信号を復調する場合の受信用DBFアンテナの信号処理部の構成を示す。2章に示した送信用DBFと同様に、受信用DBFにおいても所望の方向に1つの固定ビームを形成するものとし、そのためのアンテナ素子毎の移相量は既知としている。PSK信号を復調するためには正確な基準搬送波とクロックを供給する必要があるために、良好なCN比でこれらの信号を再生する必要がある。特に、移動体衛星通信では陸上移動通信と比較して取り扱うアンテナ素子数が比較的多くかつ伝搬距離による損失が大きいため、ビーム形成部で最適なアンテナビームを形成し、良好なCN比の受信信号とする必要がある。ここでは、移動体衛星通信用として用いられる16~19素子程度のアレーに適用することを考え、アレーアンテナとして利得を上げた状態で搬送波再生及びクロック再生を行う方式とした。即ち、各素子毎に受信される信号を固定のLO信号発生器を用いた準同期検波によりI, Q成分を生成し、各素子毎の位相及び振幅調整後にI, Q成分をそれぞれ合成し、加算された信号を用いて搬送波位相の補正及びクロックタイミングの抽出を行う方式とした(4), (9)。この場合、ビーム形成処理部と復調処理部を独立に設計することができるので複雑なビーム形成処理を行うことができ、また両者に係わるフィードバックループが含まれないためハードウェアの構成を簡潔にすることができる。PSK信号の復調処理方式には数多く提案されているが、ここではプリアンブルレスPSK信号の復調処理を想定し、FFTを使用した搬送波位相補正を行い、その後データクロックタイミングの抽出し、データ判定を行う方式を採用している(11)。なお、本構成において、ビーム形成に必要な素子毎の演算量、及び復調処理に必要な演算量を付録Bにまとめておく。

図4に示す受信DBFを実現するために、複数のDSPを用いて16チャンネル制御可能な受信用DBF信号処理部を試作した。図5にその信号処理部を用いたDBFアンテナの構成を示す。アンテナ素子毎の信号処理部には、DSPボード、1チャンネルアナログ入力ポートを有する12ビットA/Dボード(A/D)、クロックボード(CLK)、16ビットパラレルI/Oボード(P-I/O)から構成されるDBFユニット(DBF#1-16)を使用している。また、復調処理部に、DSPボード、クロックボード(CLK)、16ビットパラレルI/Oボード(P-I/O)から構成される3つの復調ユニット(Demod#1-3)、及びP-I/Oを介した転送データ及びA/D入力の同期に用いる共通のタイミングクロックの発生に1つのクロックユニット(CLK)を使用している。

このような処理部の構成で、アンテナ素子毎に受信された信号はダウンコンバータ(D/C)で周波数変換され、A/D変換同期用クロックに同期してサンプリングが行われた後に図4に示すビーム形成処理が行われる。ビーム形成を行うためのアンテナ素子毎の振幅及び位相は、送信用DBFと同様にパーソナルコンピュータより所定のDSPに転送される。素子毎に処理されたI, Qの各成分はパイプライン処理により順次加算後、P-I/Oを介して後段のDSPに転送され、最後に復調処理部

へ転送される。復調処理部では、まずDemod#1, 2において搬送波位相補正をFFTを用いて行う。具体的には、一方のDemodユニットで補正されるべきデータをDBF#16から受け取ると同時に補正されたデータをDemod#3に送出し、他方のDemodユニットでFFTを用いて周波数のずれと初期位相を推定しデータの補正を行う(11), (12)。これらの処理を一定のサンプルデータ間隔毎に交互に繰り返すことにより連続的な搬送波位相補正を実現している。最後に、Demod#3でデータクロックタイミングの抽出し、データ判定を行う(11), (13)。

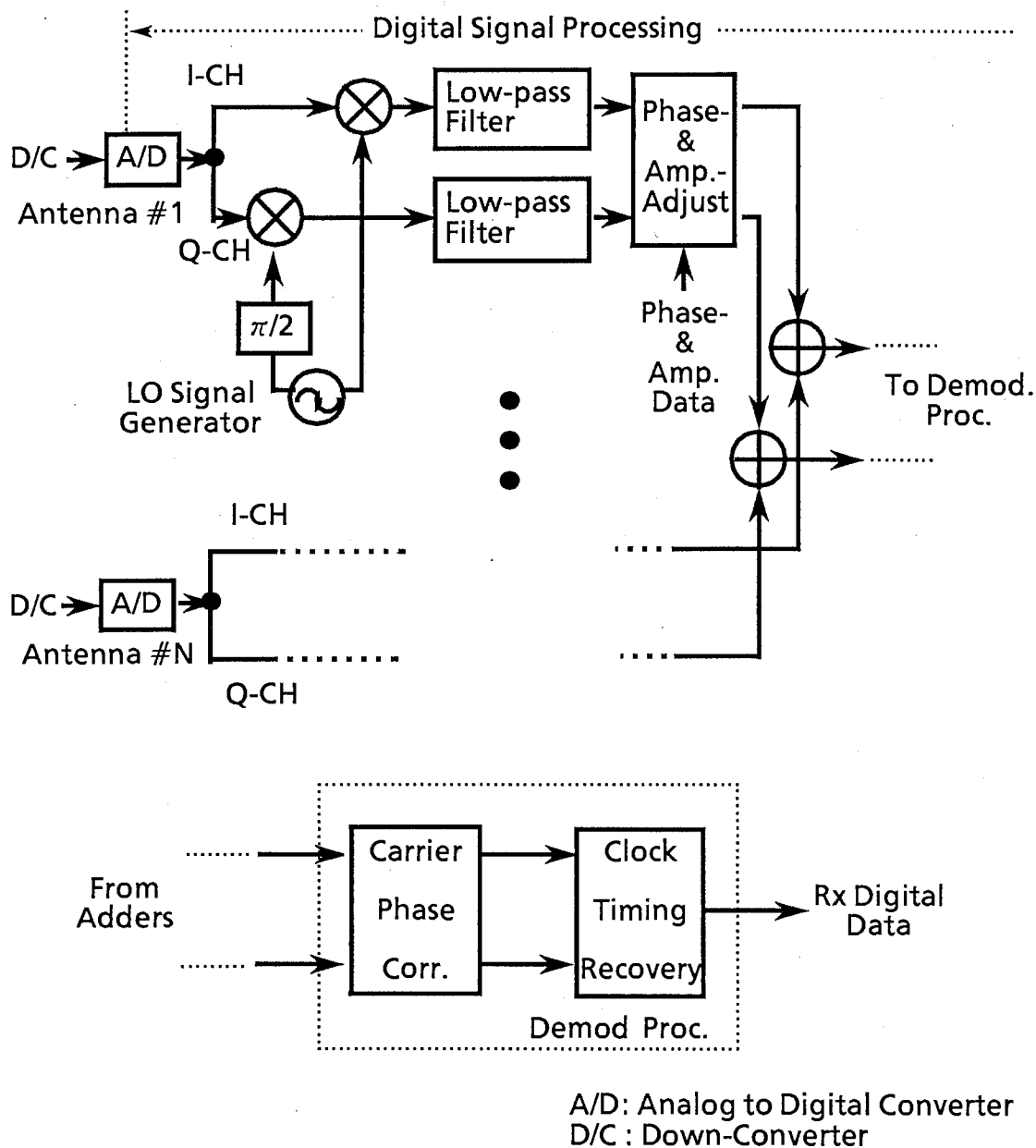


図4 受信用DBF信号処理部の構成

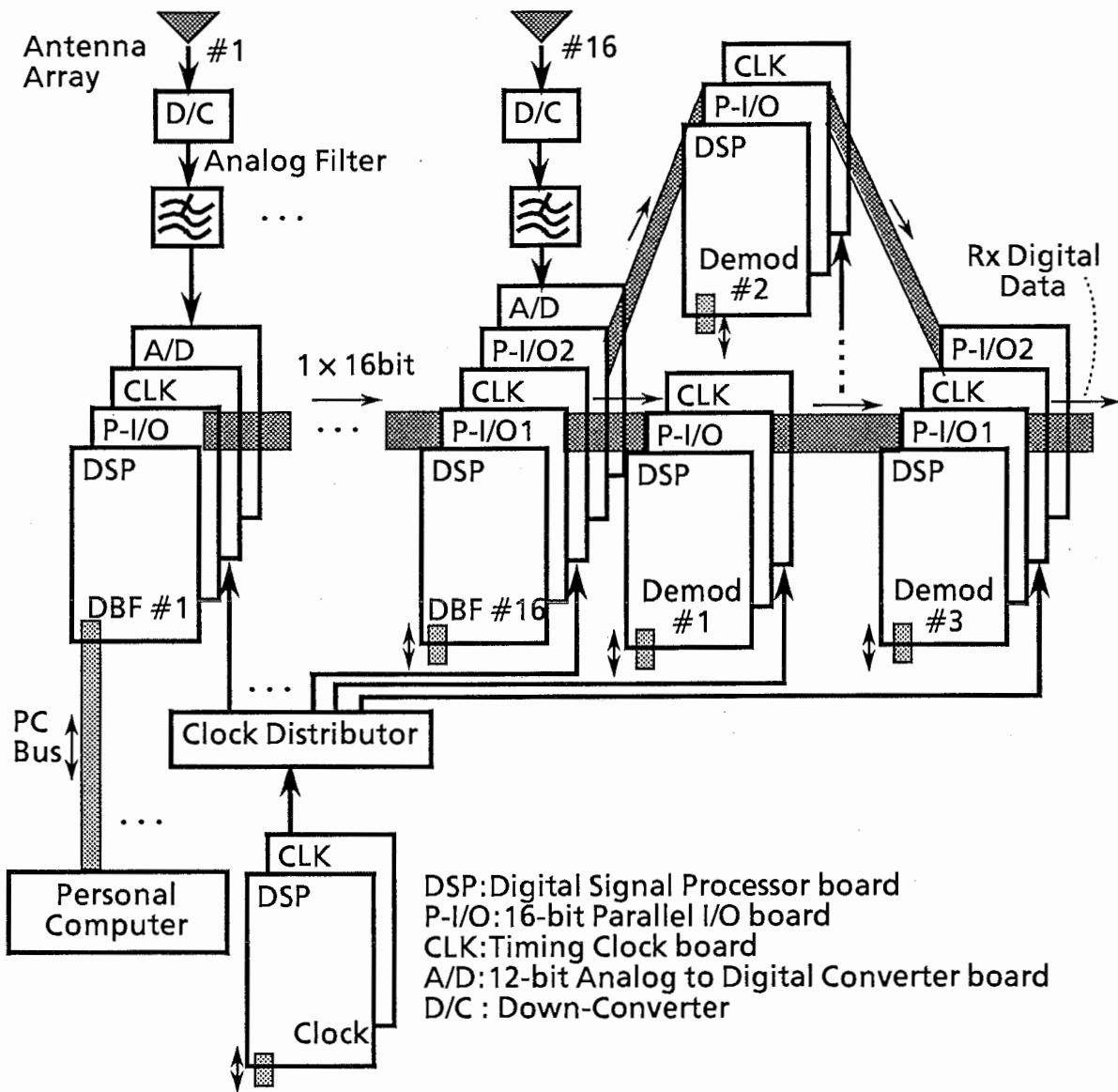


図5 試作受信DBFアンテナの構成

## 第4章 試作信号処理部を用いたDBFアンテナの特性

### 4.1 変復調実験結果

図6に送信用DBF信号処理部により生成された変調信号の一例(2チャンネル出力)を示す。ここでは、4角配列(素子間隔:1/2波長)の平面アレーを制御することとし、 $\theta=30^\circ$ 、 $\phi=0^\circ$ 方向へビームを形成することを想定している。変調波はシンボルレート16kbpsの2相PSK波、D/A変換同期用クロックの周波数128kHz、DSP内部のLO信号の周波数は32kHzとしている。また、送信フィルタは9タップの低域通過型FIRフィルタ( $\sqrt{50\%}$ ロールオフフィルタ)としており、図7に示す特性となっている。図6よりD/A変換同期用クロックに同期してD/A変換器の出力が確定し、帯域制限が施されたシンボルパターン( $t_b=62.5\mu\text{s}$ )が得られていることが分かる。また、1シンボル内のIF信号(32kHz)に注目すると、パスバンド信号においてビームを形成するための所望の位相差( $\pi/2$ )が得られていることが分かる。

図8から10に、アンテナのビーム方向を $\theta=0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ (いずれも $\phi=0^\circ$ )とした場合に受信用DBF信号処理部で再生された搬送波位相補正後のアイパターンの一例を示す。ここでは、16素子平面アレー(素子配列:4×4素子の4角配列、素子アンテナ:直交2点給電による円偏波励振の円環パッチアンテナ、素子間隔:1/2波長)において、(a)1素子で受信した場合、(b)8素子(2×4素子)で受信した場合、(c)16素子で受信した場合の比較を行っている。図よりアンテナのビーム方向が変わった場合にもアレー受信時には1素子受信時に比べアレーアンテナの利得分だけCN比が向上するためアイパターンが完全に開いていることが分かる。

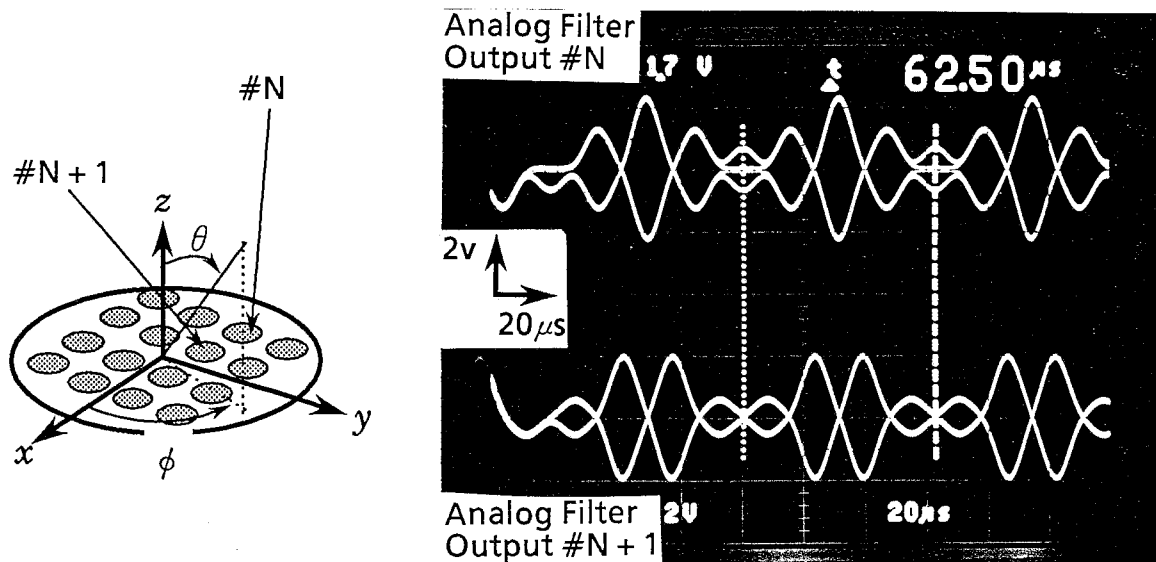


図6 ビーム形成/変調処理後の出力( $f_b = 16\text{kbps}$ ,  $\theta = 30^\circ$ ,  $\phi = 0^\circ$ )

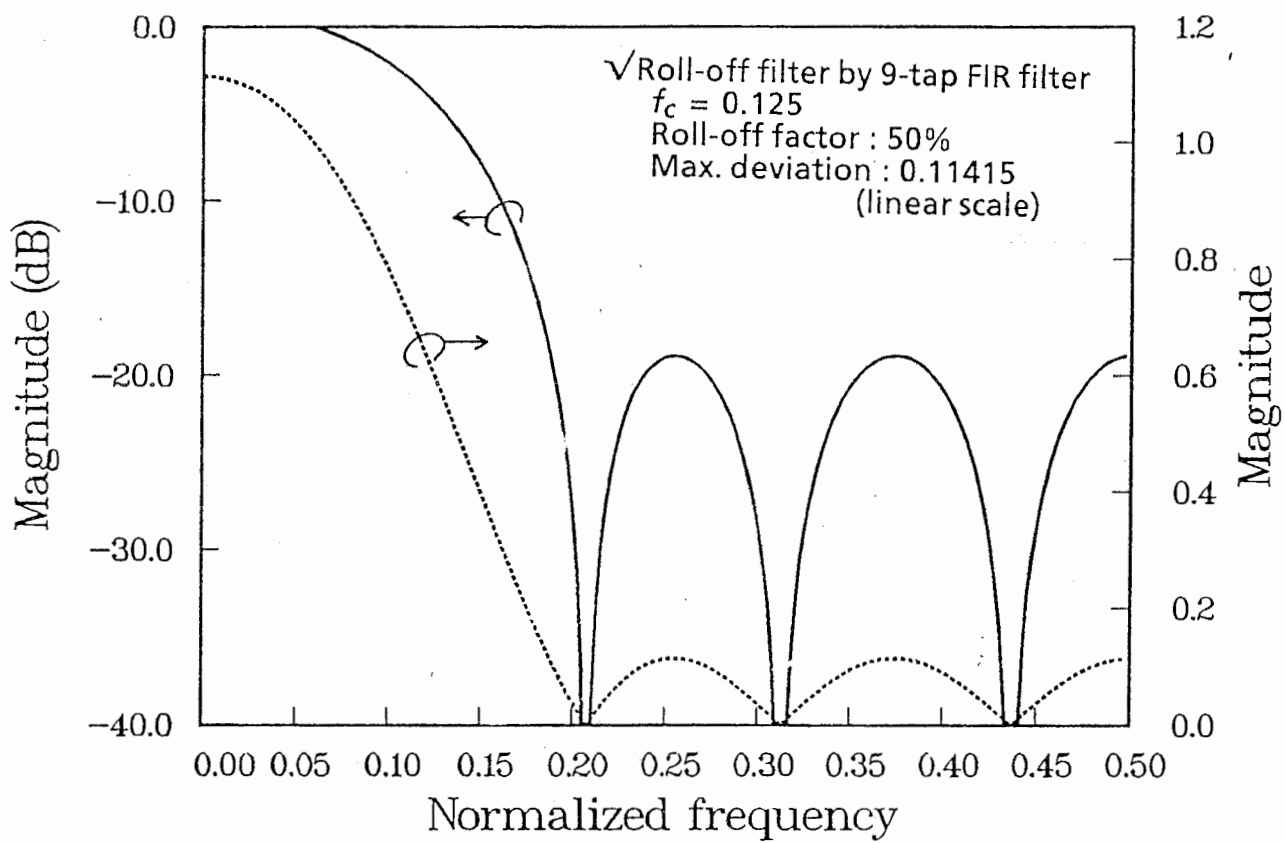
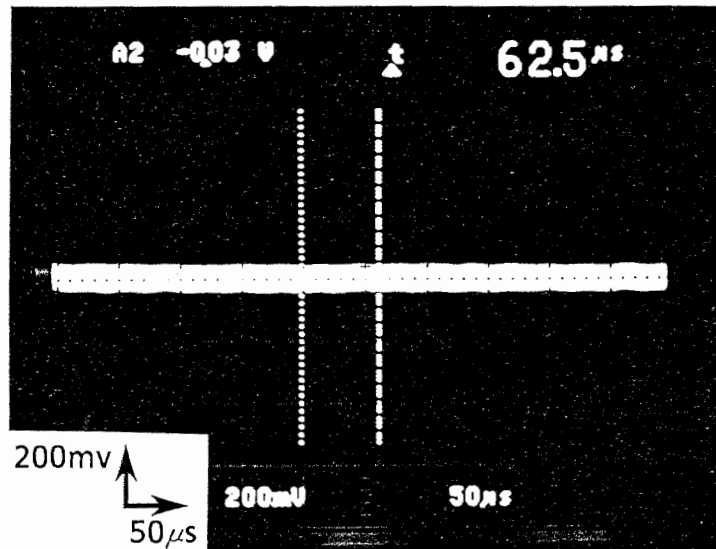
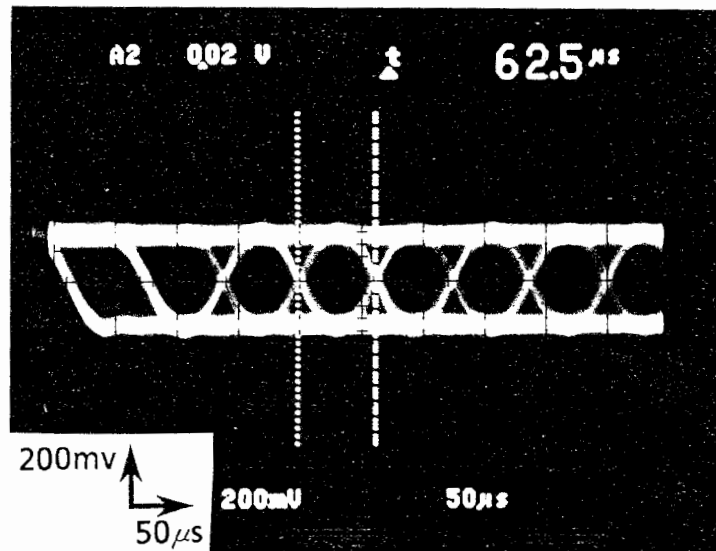


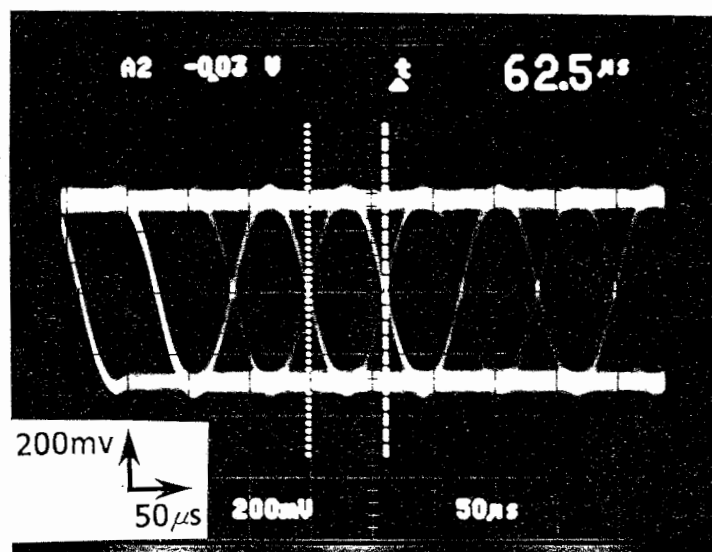
図7 FIRデジタルフィルタの周波数特性



(a) 素子単体特性

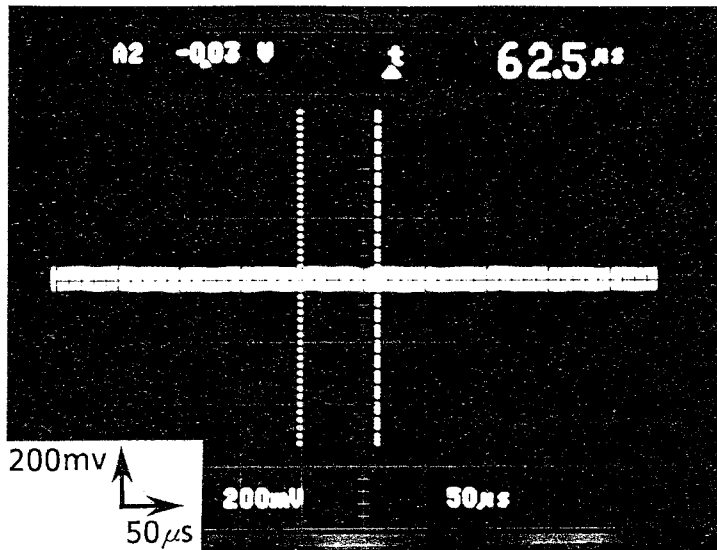


(b) 8素子アレー特性

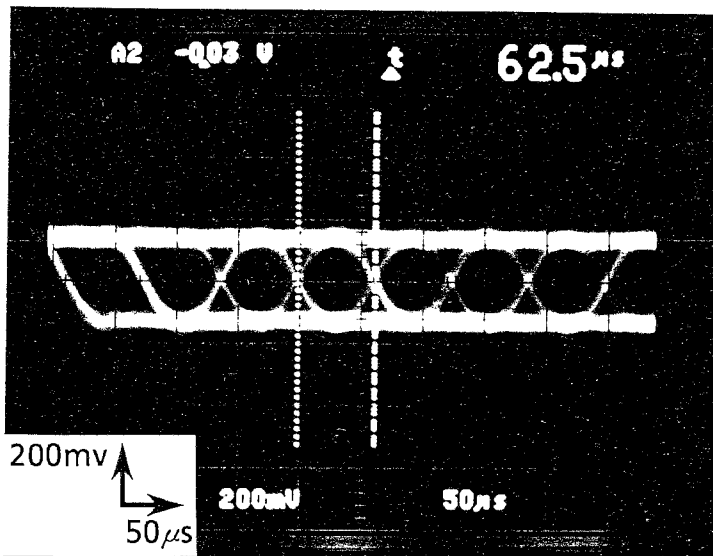


(c) 16素子アレー特性

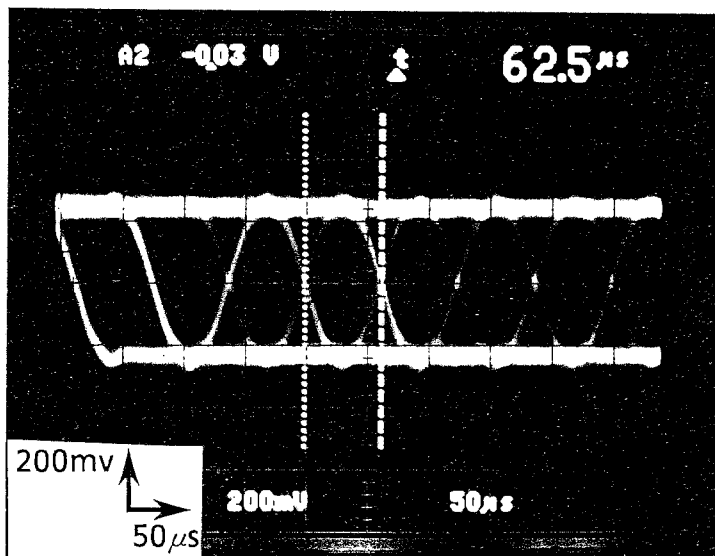
図8 受信時のアイパターン出力 ( $f_b = 16\text{kbps}$ ,  $\theta = 0^\circ$ ,  $\phi = 0^\circ$ )



(a) 素子単体特性



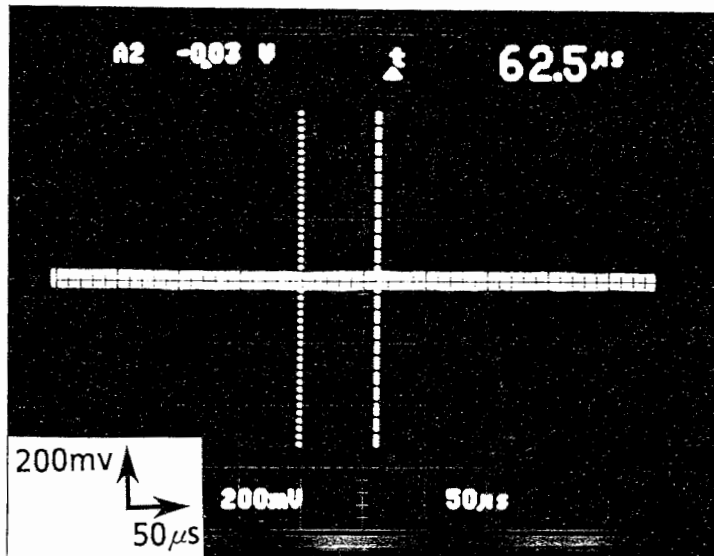
(b) 8素子アレー特性



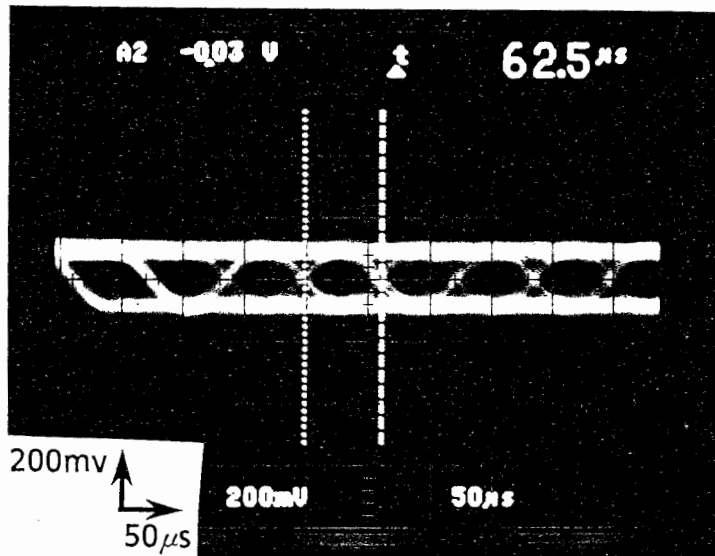
(c) 16素子アレー特性

図9 受信時のアイパターン出力 ( $f_b = 16\text{kbps}$ ,  $\theta = 30^\circ$ ,  $\phi = 0^\circ$ )

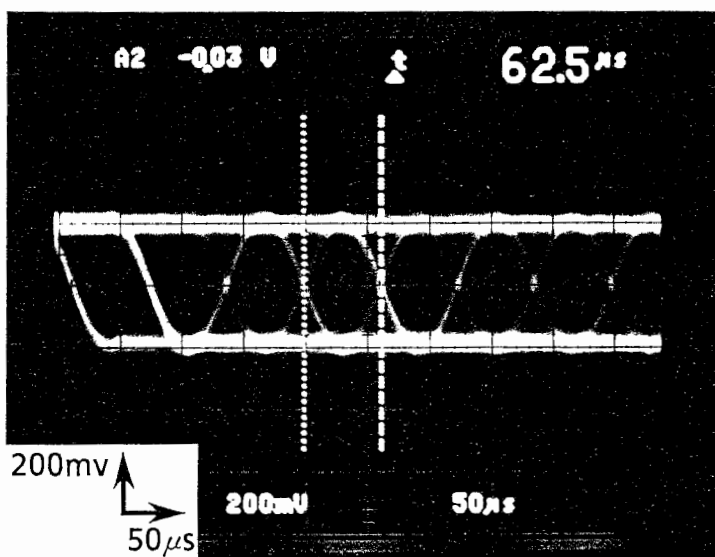




(a) 素子単体特性



(b) 8素子アレー特性



(c) 16素子アレー特性

図10 受信時のアイパターン出力 ( $f_b = 16\text{kbps}$ ,  $\theta = 60^\circ$ ,  $\phi = 0^\circ$ )

## 4.2 ビーム形成実験結果

図11に試作した信号処理部を用いてビーム制御を行った16素子平面アレーのビーム走査特性(円偏波放射特性)を示す。比較のために等価素子半径から求めた16素子平面アレーの円偏波放射特性の計算値を示している。ここで、送受信の搬送波は、周波数1.54GHz、左旋円偏波の連続波(無変調信号)とした。受信時のパターンは、素子毎のDSPにおいて8kHzに周波数変換された受信波の合成信号を測定したものである。また、アンテナ部を除いた制御装置の振幅、位相の補正は全て信号処理部で行った。なお、送信用DBFアンテナの実験ではチャンネル間の相対位相の補正のみを行った。図から、計算値によく対応したビーム走査特性が得られており、本信号処理部により精度よくビームの制御ができていることが分かる。

次に、本信号処理部を用いてコンフォーマルアレーの受信時のビーム制御を行った結果を述べる。図12にアンテナアレー部の構成、図13に給電部/信号処理部の構成を示す(14)。コンフォーマルアレーは正20面体を基本構成とする16素子アレーで、高さ:61mm、直径:492.5mmの部分球面アレーである(15)。素子アンテナは直交2点給電による円偏波励振の円環パッチアンテナで、最小素子間隔:1/2波長で配列を行っている。図13に示す給電部においては低雑音増幅器とダウンコンバータのMMIC化を行った(16)。試作したMMIC低雑音増幅器は1.04~1.94GHzで、NF1.6dB以下、利得32dB以上を得た。MMICダウンコンバータは回路の小型化のため、電極構造を共平面化線路として構成した信号合成LUFETを用いている。

図14に本信号処理部を用いて試作コンフォーマルアレーを最大利得励振し、ビーム制御を行った受信時ビーム走査特性(円偏波放射特性)を示す。比較のために等価素子半径から求めたアレー円偏波放射特性の計算値を示している。搬送波は周波数1.53GHz、右旋円偏波の連続波(無変調信号)とした。放射パターンは、平面アレーの場合と同様に、素子毎のDSPにおいて8kHzに周波数変換された受信波の合成信号を測定したものである。アンテナアレー部及びアナログ回路部を含めた制御装置の振幅、位相の補正は全て信号処理部で行った。図から、サイドローブレベルが若干高くなっているが、計算値によく対応したビーム走査特性が得られていることが分かる。



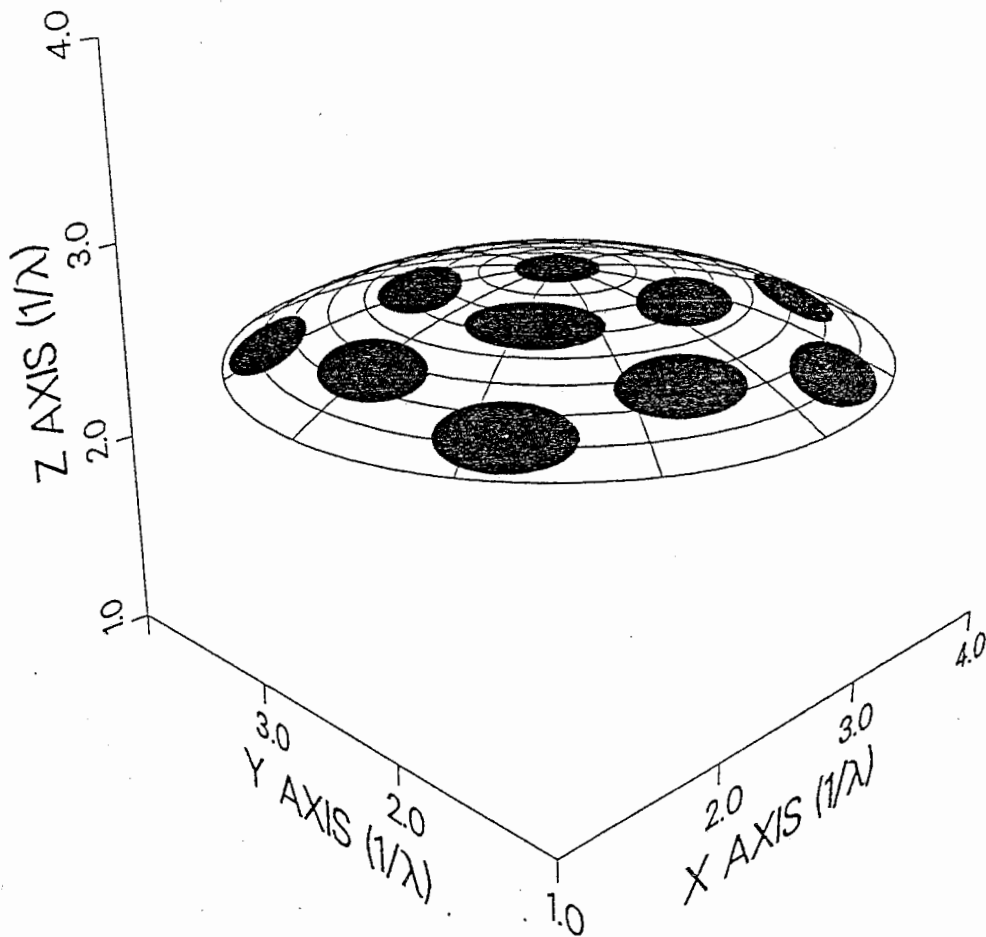


図12 16素子コンフォーマルアレーの構成

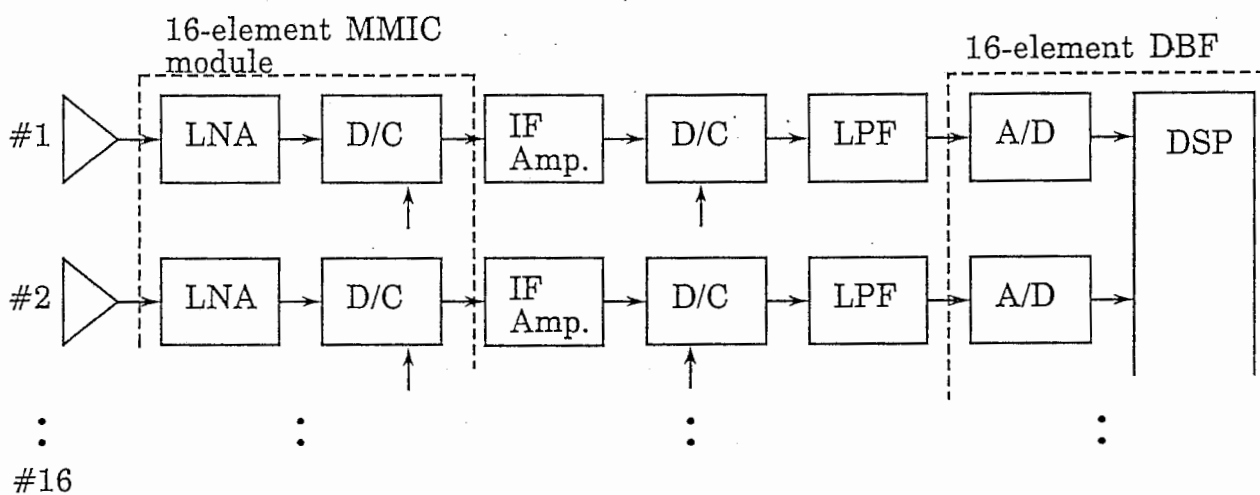


図13 給電部/信号処理部の構成

Measured  
Calculated

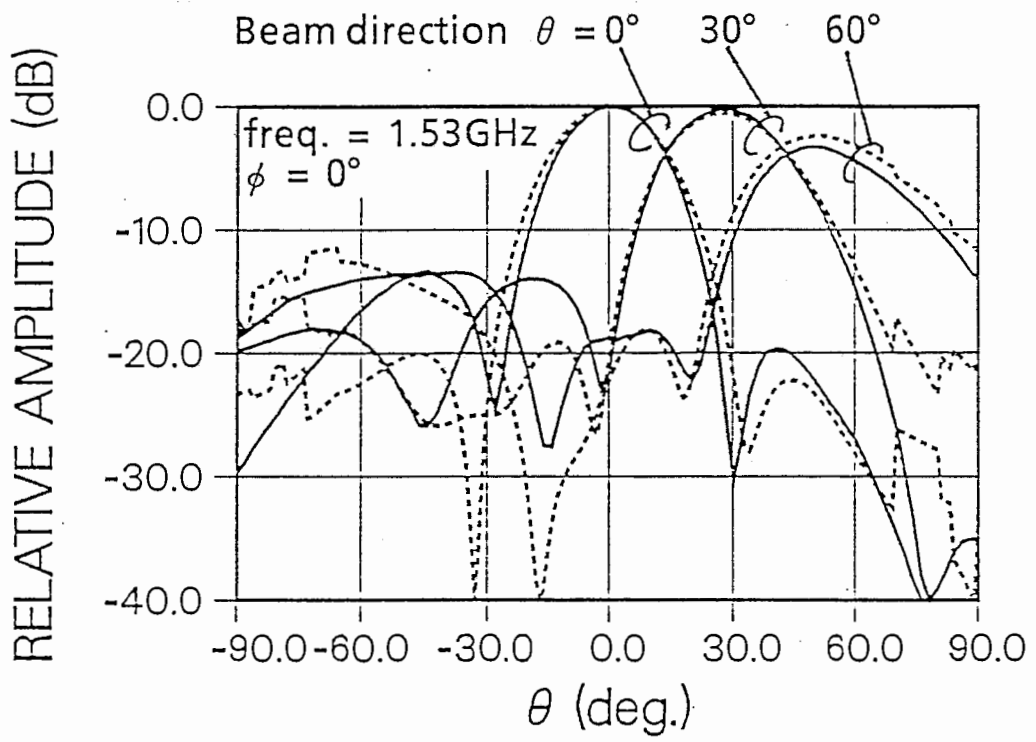
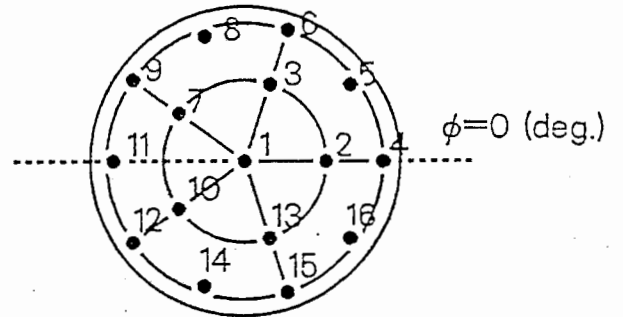


図14 16素子コンフォーマルアレーのビーム走査特性(受信時)

## 第5章 むすび

本稿では、移動体衛星通信に適用できる送受信DBFアンテナの効率の良い信号処理方式を示し、実験的に検証を行った。送信用DBFに関してはベースバンド信号発生直後で移相操作を行う方式が処理効率の観点から有効であることを示した。また、受信DBFについてはフィードバックによる遅延がない構成としてビーム形成部と復調部を分離した処理方式を示した。本文で示した送受信信号処理方式の処理性能を検証するために、複数のDSPを用いて信号処理部を試作し、動作実験を行った。その結果、16kbpsのデータ速度にに対して実時間にビーム形成と変調又は復調の処理が行えることを示した。また、平面アレー及びコンフォーマルアレーを用いたL帯でのビーム形成実験の結果、精度良く所望の方向にビームを形成できることを示した。今後、DBFの機能を用いて移動体衛星通信用アレーアンテナとしてアダプティブ化を図っていく必要がある。また、アンテナアレーと一体化を図るために信号処理部をASIC化し、その小型化を図る必要がある。

## 謝辞

本研究を進めるにあたりご指導、ご討論いただいた古濱社長、藤瀬無線第一通信研究室長に深謝致します。また、日頃ご討論いただく中條主任研究員、千葉主任研究員を始め当研究所の諸氏に感謝致します。

文献

- (1) Steyskal H., "Digital beam forming antenna, an introduction", *Microwave Journal*, pp.107-124, Jan. 1987
- (2) Haruyama T., Kojima N., Chiba I., Oh-hashii Y., Orime N. and Katagi T., "Conformal array antenna with digital beam forming network", *IEEE AP-S Symp. Digest*, 43-3, pp.982-985, Jun. 1989
- (3) Chujo W., Kashiki K., Iwasaki H. and Yasukawa K., "Spherical array antenna using digital beam forming techniques for mobile satellite communications", *Proc. of ISAP'89*, 3A3-2, pp. 553-556, Aug. 1989
- (4) Chujo W. and Yasukawa K., "Design study of digital beam forming antenna applicable to mobile satellite communications", *IEEE AP-S Symp. Digest*, 17-6, pp.400-403, May 1990
- (5) 大鐘、笹岡、三瓶、神尾：“アダプティブアレー技術を適用したGMSK/TDMA方式の検討”、信学技報、RCS89-30(1989-10)
- (6) 志村、大鐘、笹岡、三瓶、神尾、臼井、塚本：“アダプティブアレー技術を適用したGMSK/TDMA装置の開発”、信学技報、RCS89-31(1989-10)
- (7) Winters J. H., "Spread spectrum in a four-phase communication system employing adaptive antennas", *IEEE Trans. Communications*, vol. COM-30, pp.929-936(1982)
- (8) 大滝、中條、上原、藤瀬：“送信用DBFアンテナ信号処理部の試作”、信学'91秋季大、B-34
- (9) 大滝、中條、上原、藤瀬：“移動体衛星通信用DBFアンテナ信号処理部の試作”、信学'92春季大、SB-1-9
- (10) AT & T, "WE@ DSP32C Digital Signal Processor Information Manual", Jan. 1990
- (11) Honda T., Takeuchi Y., Kobayashi H. and T. Mizuno, "A novel carrier recovery method for preambleless demodulation", *Trans. IEICE*, vol. E 73, no. 10, pp.1681-1687 (Oct. 1990)
- (12) 田部井、上田：“FFTを用いた高精度周波数決定法”、信学論A、vol. J70-A、no. 5、pp.798-805(1987-05)
- (13) 山崎：“陸上移動通信における蓄積一括復調方式に関する検討”、信学技報、RCS90-3(1990-04)
- (14) 中條、大滝、小西、上原、藤瀬、竹中、小川：“DBFとMMICを備えた移動体衛星通信用アクティブコンフォーマルアレーの試作”、信学'92春季大、B-52
- (15) 中條、小西、藤瀬：“L帯薄型コンフォーマルアレーの設計と特性”、信学技報、A-P91-90(1991-10)

- (16) 竹中、小川：“L帯アクティブアレーアンテナ用MMIC低雑音増幅器・ダウンコンバータ”、1991信学春季全大、C-40



## 付録A 送信用信号処理の演算量

ここでは、送信用DBFアンテナ信号処理部においてデジタル変調とビーム形成を行う方式として、ベースバンド信号発生直後で移相操作を行う場合(本文図2参照)の素子毎の演算量を算出する。なお、ここでの演算量は単位時間当たりの実数の乗算回数及び実数の加算回数と定義する。

デジタルPSKにより変調された信号 $s_o(t_l)$ の一般式(D/A変換前のデジタル値とする)は次式のように表される。

$$s_o(t_l) = \cos(\omega_0 t_l + \phi_m + \theta_0) \quad (\text{A1})$$

$$l \geq m$$

$$l = 0, 1, \dots, m = 0, 1, \dots$$

ここで、 $\omega_0$ は搬送波の角周波数、 $t_l$ はサンプル時刻、 $\phi_m$ はデジタルPSK方式による変調位相、 $\theta_0$ はビーム形成のための位相を示す。式(A1)を $\omega_0 t_l$ ,  $\phi_m$ ,  $\theta_0$ を引数とする関数に分けて分けて書き直すと、次式のようになる。

$$s_o(t_l) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 t_l) & -\sin(\omega_0 t_l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_0) & -\sin(\theta_0) \\ \sin(\theta_0) & \cos(\theta_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi_m) \\ \sin(\phi_m) \end{bmatrix} \quad (\text{A2})$$

ここで、右辺第1項からそれぞれ、直交変調、ビーム形成、ベースバンド信号発生の計算を示す。また、第2, 3項の行列の1列目はI-CH、2列目はQ-CHの信号を示す。式(A2)において、送信データの帯域制限のために低域通過型のフィルタ(ルートロールオフフィルタ)をビーム形成後にかけると、次式のようになる。

$$s_o(t_l) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 t_l) & -\sin(\omega_0 t_l) \end{bmatrix} \text{diag}(H(\omega_c), H(\omega_c)) \begin{bmatrix} \cos(\theta_0) & -\sin(\theta_0) \\ \sin(\theta_0) & \cos(\theta_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi_m) \\ \sin(\phi_m) \end{bmatrix} \quad (\text{A3})$$

ここで、 $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ は対角成分が $a_1, a_2, \dots, a_n$ であり、その他の成分は0となる $n \times n$ 配列の行列である。また、 $H(\omega_c)$ はデジタルFIRフィルタで実現されるルートロールオフフィルタの伝達特性を示す。式(A3)の計算に必要な演算量を表A-1にまとめる。ここで、ベースバンド信号及び搬送波はプロセッサ内部のそれぞれのテーブルを参照することで発生させるものとし、演算量には含めない。また、ビームを形成するための位相量( $\cos(\theta_0)$ ,  $\sin(\theta_0)$ )は既知として、その演算量も含めない。

表A-1 送信時ビーム形成/変調処理に必要な演算量

演算内容	演算量(乗算) ①	演算量(加算) ②	演算量(① + ②)
ビーム形成	$4f_b$	$2f_b$	$6f_b$
フィルタリング	$2Nf_s$	$2(N-1)f_s$	$2(2N-1)f_s$
直交変調	$2f_s$	$f_s$	$3f_s$

$f_b$ : シンボルレート

$f_s$ : サンプルレート

$N$ : FIRフィルタのタップ数

## 付録B 受信用信号処理の演算量

ここでは、受信用DBFアンテナ信号処理部においてビーム形成とデジタル復調を行う場合(本文図4参照)の演算量を算出する。まず、B-1でビーム形成に必要な素子毎の演算量を求め、B-2でビーム形成後のアレー合成出力を用いて搬送波位相補正、及びクロック再生を行うための演算量を求める。なお、ここでの演算量も付録Aと同様に単位時間当たりの実数の乗算回数及び実数の加算回数と定義する。

### B-1 ビーム形成の演算量

素子アンテナへの入射信号 $s_i(t_l)$ の一般式は次式のように表される(A/D変換後のデジタル値とする)。

$$s_i(t_l) = \cos(\omega_0 t_l + \phi_m - \theta_0) \quad (\text{B1})$$

$$l \geq m$$

$$l = 0, 1, \dots, m = 0, 1, \dots$$

ここで、 $\omega_0$ は搬送波の角周波数、 $t_l$ はサンプル時刻、 $\phi_m$ はデジタルPSK方式による変調位相、 $\theta_0$ はビーム形成のための位相を示す。ここで、例えばデジタルVCOを局部発振器として用いて同期検波ができたとすると、受信されたI, Q-CHのデータ $[\cos(\phi_m), \sin(\phi_m)]^T$ は次式のように表される( $T$ は転置を示す)。

$$\begin{bmatrix} \cos(\phi_m) \\ \sin(\phi_m) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos(\theta_0) & -\sin(\theta_0) \\ \sin(\theta_0) & \cos(\theta_0) \end{bmatrix} \text{diag}(H(\omega_c), H(\omega_c)) \text{diag}(\cos(\omega_0 t_l), -\sin(\omega_0 t_l)) \begin{bmatrix} s_i(t_l) \\ s_i(t_l) \end{bmatrix} \quad (\text{B2})$$

ここで、右辺第1項からそれぞれ、ビーム形成、フィルタリング、同期検波(直交搬送波の乗算)の計算を示し、 $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ は対角成分が $a_1, a_2, \dots, a_n$ であり、その他の成分は0となる $n \times n$ 配列の行列である。また、行列の1列目はI-CH、2列目はQ-CHの各信号を示す。式(B2)におけるフィルタリングは、受信データの帯域制限と検波出力における高調波のろ波のために行っており、低域通過型のフィルタ(ルートロールオフフィルタ)としている。 $H(\omega_c)$ はその特性をデジタルFIRフィルタで実現した場合の伝達特性を示す。

式(B2)の計算に必要な演算量を表B-1にまとめる。ここで、局部信号はプロセッサ内部のそれぞれのテーブルを参照することで発生させるものとし、演算量には含めない。また、ビームを形成するための位相量( $\cos(\theta_0), \sin(\theta_0)$ )は既知として、その演算量も含めない。なお、表B-1第4項目のI, Q成分の加算の演算では、式(B2)により素子毎に得られるI, Q成分の和を素子間パイプライン処理により求めることを想定している。

表B-1 受信時準同期検波/ビーム形成処理に必要な演算量

演算内容	演算量(乗算)①	演算量(加算)②	演算量(① + ②)
直交搬送波乗算	$2f_s$	0	$2f_s$
フィルタリング	$2Nf_s$	$2(N-1)f_s$	$2(2N-1)f_s$
ビーム形成	$4f_s$	$2f_s$	$6f_s$
I, Q成分の加算	0	$2f_s$	$2f_s$

$f_s$ : サンプルレート  
 $N$ : FIRフィルタのタップ数

## B-2 復調処理の演算量

### B-2-1 搬送波位相補正

図B-1にFFTを用いた搬送波位相補正部の構成を示す。この搬送波位相補正部に入力されるI, Q信号(準同期検波/ビーム形成後の信号)を複素数で表すと一般に次式のようなになる。

$$s'_i(t_l) = \exp(j\Delta\omega_0 t_l + j\Delta\theta + j\phi_m) \quad (\text{B3})$$

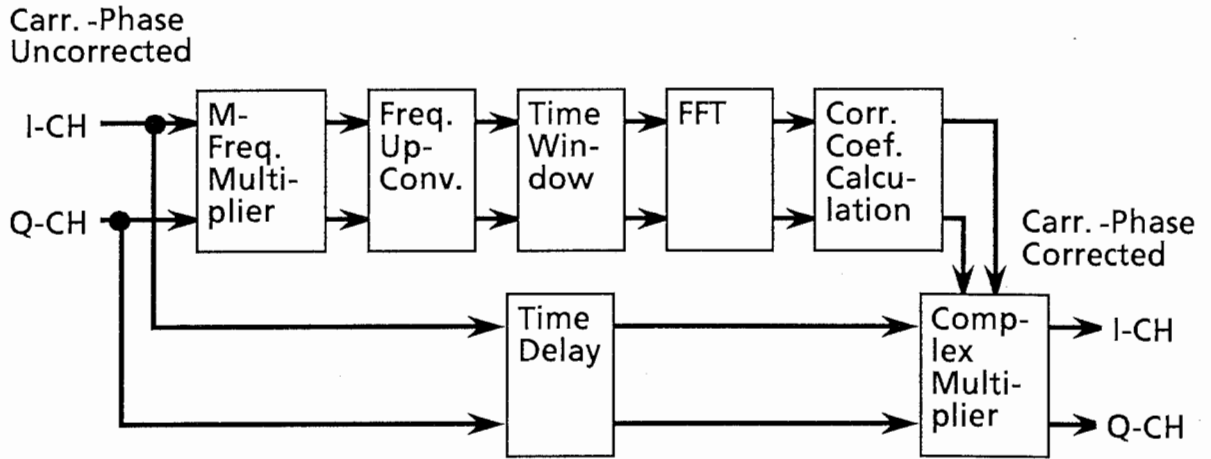
$$j = \sqrt{-1}$$

$$l \geq m$$

$$l = 0, 1, \dots, m = 0, 1, \dots$$

ここで、 $\Delta\omega_0$ は搬送波角周波数のずれ( $=2\pi\Delta f_0$ ,  $\Delta f_0$ :搬送波周波数のずれ)、 $\Delta\theta$ は搬送波の初期位相である。図B-1に示される搬送波位相の補正は、 $\Delta\omega_0$ 及び $\Delta\theta$ をFFTを用いて正確に推定し、 $\exp(-j(\Delta\omega_0 t_l + \Delta\theta))$ を補正係数として入力信号に乗ずることにより復調信号を抽出するというものである。但し、FFTを用いた搬送波周波数のずれ及び初期位相の推定では、信号に変調成分(PSK)があると搬送波周波数のずれ及び初期位相の推定ができないので、PSKの位相数( $M$ )だけ入力信号を過倍して除去する。また、FFTの対象となる信号がDC付近又はナイキスト周波数付近の成分であると誤差が生ずる。特に、式(B3)で表される準同期検波後の信号はベースバンド帯となるため、直接この信号を用いてFFTを行うと推定された搬送波周波数のずれ及び初期位相に誤差が生じてしまう。これを避けるために適当なIF周波数帯に入力信号を変換する。更に、入力信号に対して適当な時間ウィンドーを掛けてFFT後の結果において不要周波数成分の抑圧を図る。これらの計算はFFTの前処理として行われる。但し、入力されるI, Q信号そのものは別途メモリに格納するものとする。

以下に、個別の演算方法の概略を述べ、必要な演算量を算出する。



図B-1 受信時搬送波位相補正部の構成

(1) 逡倍

PSK方式による変調位相 $\phi_m$ は、2相PSKで $0, \pi$ 、4相PSKで $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ であるので、その位相数( $M$ )だけ入力信号を逡倍すると変調成分が除去できる。このときの演算量は、毎秒 $f_s \log_2 M$ 回の複素数の乗算分となる。

(2) 周波数変換とハニングウィンドーの乗算

ここでは、時間ウィンドーとしてハニングウィンドーを用いる。周波数変換とハニングウィンドーの乗算はまとめて

$$\exp(j2\pi f_{IF} t_k) \times \text{Hann}_k \quad (\text{B4})$$

$k=0, 1, \dots, N_d-1$   $N_d$ :FFTに用いるサンプルデータ数を乗ずることで実現できる。ここで、 $f_{IF}$ は周波数変換に使用する信号の周波数、 $\text{Hann}_k$ は次式で与えられるハニングウィンドーである。

$$\text{Hann}_k = 1 - \cos\left(\frac{2\pi k}{N_d}\right) \quad (\text{B5})$$

式(B4), (B5)により計算される係数は予め求めることができるので、プロセッサ内部のテーブルに格納しておくものとする。従って、ここで必要となる演算量は毎秒 $f_s$ 回の複素数の乗算分となる。

(3) FFT

(2)の結果求められた $N_d$ 個の信号に対してFFTの演算を行う。基数2の演算を行うとすると、1回のFFTの演算には、複素数の乗算が $N_d/2 \log_2 N_d$ 回、複素数の加算が $3N_d/2 \log_2 N_d$ 回必要となる。従って、FFTの演算は $N_d t_s$ ( $t_s=1/f_s$ )時間に1回行

えばよいので、演算量は複素数の乗算が毎秒 $f_s/2\log_2 N_d$ 回、複素数の加算が $3f_s/2\log_2 N_d$ 回となる。

#### (4) スペクトラム最大サンプル点の検索

FFTにより求められた複素スペクトラムを $X_k(k=0, 1, \dots, N_d-1)$ として、そのスペクトラムが最大となるサンプル点を、パワースペクトラムを計算して検索する。このとき、 $X_k$ の実部と虚部のそれぞれの2乗とその結果の加算を行うとパワースペクトラムが求められる。ここでは、検索を行うために必要なパワースペクトラムの比較に要する演算は含めない。従って、必要な演算量は、実数の乗算が毎秒 $2f_s$ 回、加算が毎秒 $f_s$ 回となる。ここで、求められたスペクトラム最大サンプル点を $f_{max}$ とする。但し、 $f_{max}$ は $[0, N_d-1]$ の値をとる整数である。

#### (5) スペクトラム最大点の推定

(4)においてスペクトラム最大サンプル点 $f_{max}$ における複素スペクトラムを $X_{max}$ とすると、

$$r = \frac{abs(X_{max-1})}{abs(X_{max})}, \text{ if } abs(X_{max-1}) < abs(X_{max+1}) \quad (B6)$$

$$s = \frac{abs(X_{max+1})}{abs(X_{max})}, \text{ if } abs(X_{max-1}) > abs(X_{max+1}) \quad (B7)$$

の関係を用いて、次式の補間式より正確なスペクトラム最大点 $f_{est}$ が求められる。

$$f_{est} = f_{max} + \frac{1-2r}{1+r}, \text{ if } abs(X_{max-1}) > abs(X_{max+1}) \quad (B8)$$

$$f_{est} = f_{max} - \frac{1-2s}{1+s}, \text{ if } abs(X_{max-1}) < abs(X_{max+1}) \quad (B9)$$

ここで、 $X_{max-1}, X_{max+1}$ はそれぞれスペクトラム最大サンプル点 $f_{max}$ 前後の点 $f_{max-1}, f_{max+1}$ における複素スペクトラムを示す。演算量の計算にあたり、式(B6), (B8)で代表させて考える。

##### ① $r$ の計算

実際には $r$ は次式により計算される。

$$r = \sqrt{\frac{X_{max-1,r}^2 + X_{max-1,i}^2}{X_{max,r}^2 + X_{max,i}^2}} \quad (B10)$$

ここで、 $X_{max,r}$ ,  $X_{max,i}$ はそれぞれ、複素スペクトル $X_{max}$ の実部、虚部を示す。分母、分子の値が既に(4)において求められているので、必要な演算量は $N_{dt_s}$ 時間の実数での除算と開包(square root)の計算がそれぞれ1回となる。

②  $(1-2r)/(1+r)$ の計算

分母、分子の計算に、 $N_{dt_s}$ 時間の実数の乗算が1回、加算が2回必要となる。その結果を用いて比を求めるために、実数の除算が $N_{dt_s}$ 時間に1回必要となる。

③  $f_{est}$ の計算

②の結果と $f_{max}$ を加算して、 $f_{est}$ を求める。このとき、 $N_{dt_s}$ 時間の実数の加算が1回必要となる。

(6) スペクトル最大周波数位置での初期位相の計算

(5)で求められた $f_{est}$ における初期位相 $\theta_{est}$ は次式により推定される。

$$\theta_{est} = \text{Arg} \{X_{max} \exp[-j\pi(f_{est} - f_{max})(1 - 1/N_d)]\} \quad (\text{B11})$$

既知となる値をまとめて、書き換えると

$$\theta_{est} = \text{Arg} \{X_{max} \exp(-ja\Delta f)\} \quad (\text{B12})$$

$$a = \pi(1 - 1/N_d)$$

$$\Delta f = f_{est} - f_{max} = (1-2r)/(1+r), \text{ or } -(1-2s)/(1+s)$$

実数での計算に書き換えると

$$\theta_{est} = \arctan \frac{-X_{max,r} \sin(a\Delta f) + X_{max,i} \cos(a\Delta f)}{X_{max,r} \cos(a\Delta f) + X_{max,i} \sin(a\Delta f)} \quad (\text{B13})$$

必要となる演算量をまとめると以下のようなになる。

①  $\sin, \cos$ 関数の引数( $a\Delta f$ )の計算

$a, \Delta f$ は既知なので、両者の乗算(実数)が $N_{dt_s}$ 時間に1回必要となる。

②  $\sin(a\Delta f), \cos(a\Delta f)$ の計算

①の結果を用いて、 $N_{dt_s}$ 時間に $\sin, \cos$ 関数の演算がそれぞれ1回必要となる。

③  $\arctan$ 関数の引数の分母、分子の計算

②の結果を用いて、 $N_{dt_s}$ 時間の実数での乗算が4回、加算が2回必要となる。

④  $\arctan$ 関数の引数の計算

③の結果を用いて $\arctan$ 関数の引数を計算するために、 $N_{dt_s}$ 時間に除算が1回必要となる。

⑤  $\arctan$ 関数の計算

④の結果を用いて、 $N_{dt_s}$ 時間に $\arctan$ 関数の演算が1回必要となる。

(7) 搬送波周波数ずれに相当する位相と初期位相の計算

(5), (6)の結果、通倍後の信号の正確な周波数 $f_{est}$ と初期位相 $\theta_{est}$ が推定できたので、これらを用いて搬送波周波数ずれに相当する1サンプル時間当たりの位相 $\Delta\omega_0 t_s$ 、初期位相 $\Delta\theta$ の計算を以下のように求め、搬送波位相補正に用いる。

①  $\Delta\omega_0 t_s$ の計算

$$\Delta\omega_0 t_s = \Delta\omega_{const} \frac{f_{est} - f_{if}}{M} = \left(\frac{\Delta\omega_{const}}{M}\right)(f_{est} - f_{if}) \quad (B14)$$

$\Delta\omega_{const}$ : FFT後のデータ(周波数領域)における1データ間隔、及び1サンプル時間当たりの位相

$f_{if}$ : FFT直前に周波数変換した際の基準周波数 $f_{IF}$ に相当するデータポイント

例えば、2相PSK信号を仮定し( $M=2$ )、サンプル周波数:128kHz、FFTに用いるサンプルデータ数:1024、変換周波数 $f_{IF}=32\text{kHz}$ ( $f_{if}=256$ )、推定された周波数 $f_{EST}=48\text{kHz}$ ( $f_{est}=384$ )とする。この場合、 $\Delta\omega_{const}$ は、

$$\Delta\omega_{const} = \frac{2\pi}{1024} \text{ (rad)} \quad (B15)$$

となる。また、 $\Delta\omega_0 t_s$ は、

$$\Delta\omega_0 t_s = \frac{2\pi}{1024} \frac{384 - 256}{2} = 0.0625 \times 2\pi \text{ (rad)} = 22.5 \text{ (deg.)} \quad (B16)$$

となり、この値は周波数ずれが8kHz(=128kHz×0.0625)の場合の1サンプル時間当たりの位相ずれに相当することがわかる。この計算では $\Delta\omega_{const}/M$ を予め求めることができるので、式(B14)の計算には $N_{dt_s}$ 時間に実数の乗算が1回、加算が1回必要となる。

②  $\Delta\theta$ の計算

$$\Delta\theta = \frac{\Delta\theta_{est}}{M} = \left(\frac{1}{M}\right) \times \Delta\theta_{est} \text{ (rad)} \quad (B17)$$

$1/M$ は予め求められるので、この計算には $N_{dt_s}$ 時間に実数の乗算が1回必要となる。

(8) 補正係数の計算

補正の対象となるデータは式(B3)で与えられる $s'_i(t_k) (=s'_{i,r}(t_k) + js'_{i,r}(t_k))$ ,  $k=0, 1, \dots, N_d-1$ )であり、搬送波位相の補正は次式により行われる。



$$s'_i(t_k) \leftarrow s'_i(t_k) \times \exp[-j(\Delta\omega_0 t_s \cdot k + \Delta\theta)] = s'_i(t_k) \times \exp(-j\Delta\omega_0 t_s)^k \times \exp(-j\Delta\theta) \quad (\text{B18})$$

$$k=0, 1, \dots, N_d-1$$

ここで、補正係数として $\Delta\omega_0 t_s, \Delta\theta$ を引数とした $\sin, \cos$ 関数、即ち $\sin(-\Delta\omega_0 t_s), \cos(-\Delta\omega_0 t_s), \sin(-\Delta\theta), \cos(-\Delta\theta)$ を求めておけば、式(B18)による補正を逐次行うことができる。従って、補正係数の計算のために、 $N_d t_s$ 時間に $\sin, \cos$ 関数の演算が共に2回必要となる。

#### (9) 搬送波位相の補正

(8)において求められた補正係数を用いて搬送波位相の補正を行うには、1つのデータに対し複素数の乗算が2回必要となり、演算量は複素数の乗算が毎秒 $2f_s$ 回となる。

上述の(1)から(9)で述べた搬送波位相補正に必要な演算量をまとめると表B-2となる。

表B-2 受信時搬送波位相の補正処理に必要な演算量

演算内容	演算量(乗算)①	演算量(加算)②	演算量(① + ②)
逓倍	$4f_s \cdot \log_2 M$	$2f_s \cdot \log_2 M$	$6f_s \cdot \log_2 M$
周波数変換 + ウィンドー乗算	$4f_s$	$2f_s$	$6f_s$
FFT	$2f_s/N_d \cdot \log_2 N_d$	$4f_s/N_d \cdot \log_2 N_d$	$6f_s/N_d \cdot \log_2 N_d$
スペクトラム最大サンプル点検索	$2f_s$	$f_s$	$3f_s$
スペクトラム最大点推定	$14f_s/N_d$	$14f_s/N_d$	$28f_s/N_d$
初期位相推定	$30f_s/N_d$	$23f_s/N_d$	$53f_s/N_d$
$\Delta\omega_0 t_s, \Delta\theta$ の計算	$2f_s/N_d$	$f_s/N_d$	$3f_s/N_d$
補正係数の計算	$22f_s/N_d$	$16f_s/N_d$	$38f_s/N_d$
搬送波位相補正	$8f_s$	$4f_s$	$12f_s$

$f_s$ : サンプルレート  
 $M$ : PSK信号の変調位相数  
 $N_d$ : FFTに用いるサンプル数

#### B-2-2 クロック再生

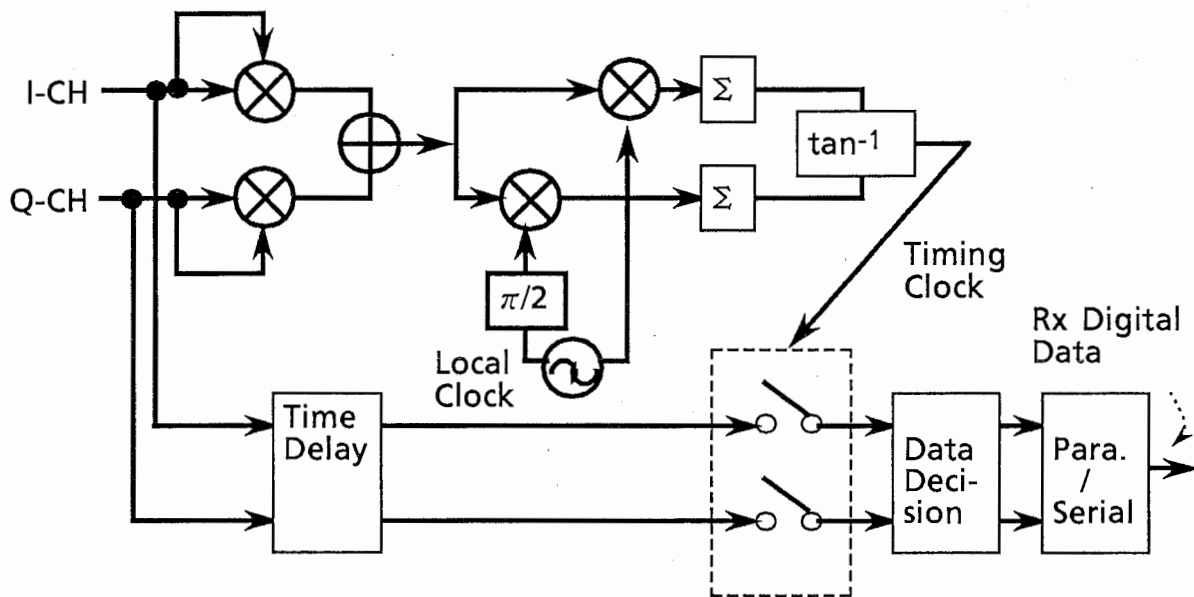
図B-2にクロック再生部の構成を示す。クロック再生では送受信間のクロックタイミングの位相差を求め、その位相差の整数倍に相当するサンプル点において

復調されたデータを判定すればよい。PSK信号のクロック再生を行う際には、送受信フィルタによる帯域制限を受けたとき、包絡線が一定とならず、シンボルの変わり目で包絡線が落ち込むという性質を利用することができる。即ち、落ち込みの最小時間間隔はデータクロックのタイミング $t_b(=1/f_b)$ となるので、シンボルレートに相当する周波数成分が受信信号に含まれる。この性質は受信信号を自乗した信号に対しても当てはまるので、直交する基準クロックをプロセッサ内部で発生させ、自乗した信号との相関を取ることで上述の位相差を求めることができる。式にまとめると次式のように表される。

$$\theta_{clock} = \arctan \frac{\sum_{k=0}^{N_{clock}-1} |s'_i(t_k)|^2 \sin(2\pi f_b t_k)}{\sum_{k=0}^{N_{clock}-1} |s'_i(t_k)|^2 \cos(2\pi f_b t_k)} \quad (B19)$$

$$|s'_i(t_k)|^2 = s'_{i,r}(t_k)^2 + s'_{i,i}(t_k)^2$$

ここで $N_{clock}$ は式(B19)の計算に用いるサンプルデータ数で、サンプルレートとデータレートの比 $f_s/f_b$ の整数倍となるように選ぶ。



図B-1 受信時クロック再生部の構成

(1) 入力データのパワーの計算

PSK信号がその受信データにより、符号が正負と変化するので、その2乗をとり信号の符号変化をなくす。この計算に実数の乗算が毎秒 $2f_s$ 回、加算が毎秒 $f_s$ 回必要となる。但し、2相PSK信号の場合、I-CHデータのみを用いればよいので、乗算が毎秒 $f_s$ 回、加算が毎秒0回となる。

(2) 直交基準クロックとの相関

基準クロックをプロセッサのテーブルルックアップにより発生させるとすると、相関の計算には乗算が毎秒 $2f_s$ 回、加算が $2f_s$ 回必要となる。

(3) 相関演算結果の比の計算

$\arctan$ 関数の引数となる相関演算結果の比を求めるために、 $N_{clock}t_s$ 時間に除算が1回必要となる。

(4)  $\theta_{clock}$ の計算

(3)の結果を用いてメモリテーブルのルックアップにより $\theta_{clock}$ が求められるものとし、演算量には含めない。

上述の(1)から(4)で述べたクロック再生に必要な演算量をまとめると表B-3となる。

表B-3 受信時クロック再生処理に必要な演算量

演算内容	演算量(乗算)①	演算量(加算)②	演算量(① + ②)
入力データの自乗	$2f_s$	$f_s$	$3f_s$
クロック相関演算	$2f_s$	$2f_s$	$4f_s$
相関演算結果の比	$4f_s/N_{clock}$	$3f_s/N_{clock}$	$7f_s/N_{clock}$
$\theta_{clock}$ の計算	0	0	0

$f_s$  : サンプルレート

$N_{clock}$  : 相関演算に用いるサンプル数

(参考1) 除算の計算

引数は分母、分子とも浮動小数点数で表されると仮定する。分母を $D$ 、分子を $N$ とすると、次式のように除算の演算が行われる。

$$\frac{N}{D} = N \times \frac{1}{D} = N \times \frac{1}{M \times 2^n} = N \times \frac{1}{(1+\alpha)} 2^{-n} \quad (\text{B20})$$

$n$ : 整数  
 $M$ : [1, 2]

$1/(1+a)$ を級数展開すると、

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 \dots = (1-a)[1 + a^2 + (\alpha^2)^2] \quad (B21)$$

となる。 $2^{-n}$ は $n$ ビットシフトに相当する。結局、除算の計算には、実数の乗算が4回、加算が3回必要となる。

(参考2) 開包(square root)の計算

引数 $X$ が浮動小数点数で表されると仮定する。

$$\sqrt{X} = \sqrt{(M \times 2^n)} = \sqrt{M} \cdot 2^{\frac{n}{2}} \quad (B22)$$

$n$ : 整数  
 $M$ : [1, 2]

まず、 $\sqrt{M}$ の計算を級数展開を施して行くと、次式のように求められる。

$$\sqrt{M} = (1+a)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8} + \frac{a^3}{16} - \frac{5a^4}{128} + \frac{7a^5}{256} - \frac{21a^6}{1024} \dots \quad (B23)$$

$$\sqrt{M} \approx (((c_5 a + c_4) a + c_3) a + c_2) a + c_1) a + c_0 \quad (B24)$$

次に、 $2^{n/2}$ は次のように求められる。

- $n$ : even       $2^n$ を1ビットだけシフトすればよい。
- $n$ : odd         $2^{(n+1)/2}$ として、 $\sqrt{M}$ で求められる値に $\sqrt{2}$ を乗じて、 $2^n$ を1ビットだけシフトすればよい。

この計算にあたり、 $n$ がeven, oddの場合のそれぞれに対応する $\sqrt{M}$ の展開係数を用意しておけば、両者の演算量は同じとなる。このときの演算量は、実数の乗算が5回、加算が5回必要となる。

(参考3) sin(X)の計算

次式の級数展開の式を用いて計算する。

$$\sin(X) = X + c_1 X^3 + c_2 X^5 + c_3 X^7 + c_4 X^9 = (((c_4 X^2 + c_3) X^2 + c_2) X^2 + c_1) X^2 + 1) X \quad (B25)$$

$$c_1 = -0.166666567, c_2 = 0.8333333334 \cdot 10^{-2},$$

$$c_3 = -0.198412698 \cdot 10^{-3}, c_4 = 0.275573192 \cdot 10^{-5}$$

このときの演算量は、実数の乗算が6回、加算が4回必要となる。

(参考4)  $\cos(X)$ の計算

次式の級数展開の式を用いて計算する。

$$\cos(X) = 1 + c_1 X^2 + c_2 X^4 + c_3 X^6 + c_4 X^8 = (((c_4 X^2 + c_3) X^2 + c_2) X^2 + c_1) X^2 + 1 \quad (\text{B26})$$

$$c_1 = -0.5, c_2 = 0.416666667 \cdot 10^{-1},$$

$$c_3 = -0.138888889 \cdot 10^{-2}, c_4 = 0.248015873 \cdot 10^{-4}$$

このときの演算量は、実数の乗算が5回、加算が4回必要となる。

(参考5)  $\arctan(X)$ の計算( $X > 0$ )

次式の級数展開の式を用いて計算する。

$$\arctan(X) = \frac{\pi}{4} + c_1 Y + c_2 Y^3 + c_3 Y^5 + c_4 Y^7 + c_5 Y^9 = (((c_5 Y^2 + c_4) Y^2 + c_3) Y^2 + c_2) Y^2 + c_1) Y + \frac{\pi}{4} \quad (\text{B27})$$

$$c_1 = 0.999866, c_2 = -0.3302995,$$

$$c_3 = 0.180141, c_4 = -0.085133$$

$$c_5 = 0.0208351$$

この式の演算には実数の乗算が6回、加算が5回必要となる。ここで、 $Y$ は次式で与えられる。

$$Y = \frac{X-1}{X+1} \quad (\text{B28})$$

この $Y$ の計算に実数の加算が2回、除算が1回必要となる。従って、上記2式を含めて、 $\arctan(X)$ の計算には、実数の乗算が10回、加算が10回必要となる。