

TR-H-038

0043

標準正則化における滑らかさの尺度の一般化と  
面復元への応用

水谷 博之

1993.11.01

ATR 人間情報通信研究所

〒619-02 京都府相楽郡精華町光台 2-2 ☎07749-5-1011

**ATR Human Information Processing Research Laboratories**

2-2, Hikaridai, Seika-cho, Soraku-gun, Kyoto 619-02 Japan

Telephone: +81-7749-5-1011

Facsimile: +81-7749-5-1008

標準正則化における滑らかさの尺度の一般化と  
面復元への応用

水谷 博之

ATR 人間情報通信研究所

## あらまし

コンピュータビジョンの分野で頻繁に用いられている標準正則化は、先験的な情報を用いて不良設定問題を良設定問題に変換する理論である。この先験的な情報とは多くの場合、得ようとする関数が滑らかであるというものである。従来、この滑らかさを計る尺度は物理的には変形体のエネルギーに相当するものであり、変形体としては、薄膜および薄板単体、あるいはこれらを複合したものが用いられてきた。しかし、自然地形や自然画像の中にはこれらの尺度を用いた正則化では原画像のパワースペクトルを正しく復元できない画像が多くあり、改善の余地があった。そこで本論文では連続次数に一般化された微積分演算子を用いることで薄膜モデルと薄板モデルの統合・一般化を行ない、滑らかさの尺度の一般化を行なう。そしてこの一般化された滑らかさの尺度を用いた正則化手法と最適な滑らかさの尺度パラメータの決定方法を示す。さらにこれらの手法を初期視覚問題であるスパースなデータからの面復元に適用し、計算機実験により従来手法との比較を行ない、一般化された滑らかさの尺度の優位性を示す。

## キーワード

正則化、微積分演算子、滑らかさ、面復元、グリーン関数

## **Abstract**

The standard regularization is a theory that converts ill-posed problems into well-posed problems by assuming some a priori information about solutions. This assumption is usually concerned with smoothness of a function that is a solution of the problem. In order to measure smoothness of a function, membrane or thin-plate measure have been used, which are deformation energy of a membrane and a thin-plate, respectively. We generalize smoothness measure by using a continuous order differential-integral operator. We apply this generalized measure to surface reconstruction from sparse data and show it's usefulness and superiority comparing to thin-plate measure.

## **Keywords**

regularization, differential-integral operator, smoothness measure, surface reconstruction, Green function

## もくじ

1	まえがき	4
2	標準正則化	5
3	滑らかさの尺度の一般化に基づく正則化	7
3.1	滑らかさの尺度の一般化	7
3.2	スムーズネス指数の決定	8
4	面復元実験	9
5	むすび	11
	参考文献	14
	付録	16
	図、表	18

## 1 まえがき

コンピュータビジョンの分野で近年盛んに用いられている標準正則化は、得ようとする解に対する先験的な知識あるいは事前情報を拘束条件として積極的に導入し、変分法に基づく最適化手法を用いることにより不良設定な逆問題を良設定問題に変換し物理的にもっともな解を与えるひとつの理論である[11]。ある種の初期視覚問題、例えば、「陰影からの形状復元」[4]、「エッジ検出」[12]、「オプティカルフロー」[3]、「面復元」[17]を解くうえで、この先見的な知識あるいは事前情報に基づく拘束条件は「滑らかさの拘束条件 (smoothness constraint)」と呼ばれ、復元画像やフローが滑らかになるように適当な微分演算子を用いて作られる。

面復元を考えてみよう。これはスパースに観測された奥行きデータから元の曲面を復元する問題であり、我々の視覚過程の初期の段階で行われていると考えられている。標準正則化による面復元は本質的にはスプライン平滑化と同じであり、離散的に与えられたデータにノイズが含まれている場合に、ノイズを取り除きつつ離散データを補間するというものである。

さて、この面復元で用いられる滑らかさの拘束条件としては、従来より物理的に薄膜、薄板の曲げのエネルギーを表すもの[18][1][7]、あるいは Terzopoulos によって導入された “splines under tension” と呼ばれる、局所的に曲面の滑らかさをコントロールするように薄膜と薄板のエネルギーを複合したものが用いられてきた[17]。

これらの拘束条件は、薄膜および薄板に対してそれぞれ1次および2次の微分演算子から構成されることにより、復元面のパワースペクトル(エネルギースペクトル)はそれぞれ $-2$ 、 $-4$ のべき指数を持つものになる。従って、原曲面のスペクトルがこれらの復元面のスペクトルに一致しない場合、すなわち、原曲面の滑らかさが薄膜や薄板モデルでは表すことが不適切な場合は、明らかに物理的に適切な復元を行なうことは出来ないのである。

また、Pentland[10]やMandelbrot[6]が指摘しているように、自然界にはべき指数が $-2$ と $-4$ の中間のパワースペクトルを示す曲面や画像が多く存在することを考慮すると、従来の滑らかさの尺度のみでは自然地形や自然画像の性質を反映した面復元を行なうことは困難であると思われる。

この問題に対してSzeliskiは先のsplines under tensionモデルと多重解像度表現を組み合わせることで、薄膜と薄板の中間のパワースペクトルをもつフラクタル画像の復元を行なった[15]。しかし、この方法は荒い解像度から細かい解像度へと、順次、曲面を復元するものであり直接任意の解像度での面を復元することは出来なかった。

そこで本論文では、滑らかさの尺度を構成する通常の整数階の微積分演算を行なう微積分演算子を実数階の演算を実行できるように一般化することで薄板と薄膜の変形エネルギーを統合・一般化し、滑らかさの尺度の一般化をおこなう。その結果、多重解像度表現を介するなく薄膜と薄板の中間のパワースペクトルを復元面に持たせることができるように標準正則化の拡張をおこなう。

以下、次節では標準正則化の簡単な説明とグリーン関数を用いた正則化解の導出を行なう。第3節では滑らかさの尺度の一般化と滑らかさの尺度パラメータであるスムーズネス指数の決定手法を示し、第4節では面復元問題への具体的応用を行なう。第5節ではまとめと今後の課題について述べる。

## 2 標準正則化

標準正則化では次式で定義されるエネルギー汎関数  $E[f]$  を最小にする連続な一価関数  $f(\vec{r})$  を求める。

$$E[f] = \sum_{i=1}^N (g_i - f(\vec{r}_i))^2 + \lambda \|Qf(\vec{r})\|^2 \quad (1)$$

ここで、 $g_i$  は観測データであり、面復元問題ではスパースな奥行きデータである。また、 $\lambda$  は正則化パラメータと呼ばれる正実数、 $Q$  は線形作用素、 $N$  は観測データ数。式(1)の右辺の第2項は復元される曲面に対する拘束条件であり、ベイズ推定の立場からは復元される曲面群の事前分布を表すと考えることができる。通常、この項において  $Q$  としては微分演算子を採用することで連続関数  $f(\vec{r})$  の連続性を限定する。このとき、この第2項は関数  $f(\vec{r})$  の全体としての滑らかさを計っていると考えられるから、これを滑らかさの尺度と呼ぶ。従来から用いられてきた薄板モデルおよび薄膜モデルでは滑らかさの尺度は、 $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$  と書くと、それぞれ、

$$\iint f_x^2 + f_y^2 dx dy \quad (2)$$

$$\iint f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2 dx dy \quad (3)$$

である。

さて、正則解  $f(\vec{r})$  を求めるために、式(1)の変分を実行すると Euler-Lagrange 方程式は

$$\delta E = \sum_{i=1}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) (f(\vec{r}_i) - g_i) + \lambda Q^* Q f = 0 \quad (4)$$

である。ここで、 $Q^*$  は  $Q$  の共役作用素。式 (4) を適当な境界条件のもとで直接解くこともできるが、ここでは  $Q^*QG(\vec{r}_1; \vec{r}_2) = \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$  を満たすグリーン関数  $G(\vec{r}_1; \vec{r}_2)$  を用いた解法を示す [13]。このグリーン関数を用いると  $f(\vec{r})$  は次式のように表現できる。

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^N (g_i - f(\vec{r}_i)) G(\vec{r}; \vec{r}_i) \quad (5)$$

式 (5) を解くために、 $c_i = (g_i - f(\vec{r}_i)) / \lambda$  とおくと  $c_i$  は次式の連立方程式より求まる。

$$(G + \lambda I)c = f \quad (6)$$

ただし、 $I$  は単位行列、 $(c)_i = c_i$ 、 $(G)_{ij} = G(\vec{r}_i; \vec{r}_j)$ 、 $(f)_i = f(\vec{r}_i)$  である。よって、式 (1) の汎関数  $E[f]$  を最小にする  $f(\vec{r})$  は次のように求まる。

$$f(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N c_i G(\vec{r}; \vec{r}_i) \quad (7)$$

ただし、 $c$  は式 (6) より求まる。 $\lambda = 0$  の場合も、式 (6) と式 (7) を連立させれば正則解を計算することができ、この場合はデータ点  $g_i$  を通る曲面が正則解として得られる。

ここで、グリーン関数  $G(\vec{r}_1; \vec{r}_2)$  の性質について簡単にふれておく。式 (4) の  $Q^*Q$  が自己共役演算子の場合、これに対するグリーン関数は対称、すなわち  $G(\vec{r}_1; \vec{r}_2) = G(\vec{r}_2; \vec{r}_1)$  である。その結果、式 (6) の行列  $G$  は対称行列であり実固有値を持つ。また、 $Q$  が並進対称かつ回転対称な演算子の時、対応するグリーン関数は動径関数、すなわち  $G(\vec{r}_1; \vec{r}_2) = G(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$  である。

通常、グリーン関数は適当な境界条件のもとで決定されるが、ここでは  $Q^*QG(\vec{r}_1; \vec{r}_2) = \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$  の主要解（あるいは基本解）をグリーン関数として採用する。このとき上述した薄膜モデルおよび薄板モデルに対するグリーン関数は、それぞれ

$$G(\vec{r}_1; \vec{r}_2) = \frac{1}{2\pi} \ln(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \quad (8)$$

$$G(\vec{r}_1; \vec{r}_2) = \frac{1}{8\pi} |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 \ln(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \quad (9)$$

である。

### 3 滑らかさの尺度の一般化に基づく正則化

この節では復元される面の滑らかさを制約する従来から用いられてきた尺度である薄膜モデルおよび薄板モデルを実数次の微積分演算子を導入することで統合・一般化し、これに対するグリーン関数を導出する。また、復元データとノイズに関する事前知識があれば特別な場合は2乗誤差最小の意味で最適な滑らかさの尺度を決定できることを示す。

#### 3.1 滑らかさの尺度の一般化

式(2)および式(3)で表される滑らかさの尺度を一般化し様々な滑らかさを表すために、次式で定義される一般化微積分演算子  $D^\alpha$  を導入する<sup>1</sup>。

$$D^\alpha f(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{sgn(k)\frac{\alpha\pi}{2}|k|^\alpha} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk \quad (10)$$

ただし、次数  $\alpha$  が負整数の場合は積分を、また正整数の場合は通常の微分を行なうものである。この演算子の導出については付録1で述べる。

この一般化微積分演算子を用いると式(2)および式(3)で定義される薄膜と薄板の滑らかさの尺度は次式により統合、一般化される。

$$\|Qf(\vec{r})\|^2 = \begin{cases} \|D_x^\alpha f(\vec{r})\|^2 & 1 \text{次元} \\ \sum_{\tau=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\tau} \|D_x^{\alpha-\tau} D_y^\tau f(\vec{r})\|^2 & 2 \text{次元} \end{cases} \quad (11)$$

ただし、 $D_x^\alpha, D_y^\alpha$  はそれぞれ  $x, y$  に関する偏微分演算子であり、薄膜および薄板の滑らかさの尺度はそれぞれ  $\alpha = 1, 2$  に対応する。実数パラメータ  $\alpha$  は滑らかさの尺度を規定するものであるから、以下では「スムーズネス指数」と呼ぶ。

空間次元が  $n$  でスムーズネス指数が  $\alpha$  であるときのグリーン関数を  $G_n^\alpha$  と書くと、式(11)から導かれるグリーン関数は付録2より

$$G_1^\alpha(|x|) = \begin{cases} \frac{(ix)^{2\alpha-1}}{2\pi(2\alpha-1)!} \{(-1)^{2\alpha-1} k(x, 2\alpha) & (2\alpha = \text{整数}) \\ \quad + k(-x, 2\alpha)\} \\ \frac{\sin(\pi\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}{\pi} |x|^{2\alpha-1} & (2\alpha \neq \text{整数}) \end{cases} \quad (12)$$

<sup>1</sup>これは Riesz によって導入された演算子と同等である [14]。

$$G_2^\alpha(r) = \begin{cases} \frac{-r^{2\alpha-2}}{2^{2\alpha}\pi\Gamma(2\alpha-1)} \cdot & (2\alpha = \text{整数}) \\ \left\{ \sum_{n=0}^{[\alpha+1/2]-1} (-1)^{2\alpha+n-1} \binom{2\alpha-1}{n} \left( \psi(\alpha-n) + \log\left(\frac{2}{r}\right) \right) \right. \\ \left. + \sum_{n=[\alpha+1/2]}^{2\alpha-1} (-1)^n \binom{2\alpha-1}{n} \left( \psi(n+1-\alpha) + \log\left(\frac{2}{r}\right) \right) \right\} \\ \frac{(-1)^{[2\alpha]-1} r^{2\alpha-2}}{\pi 4^\alpha \prod_{n=1}^{[2\alpha]-1} (n+1-2\alpha)} \cdot & (2\alpha \neq \text{整数}) \\ \left( \sum_{m=0}^{[\alpha+1/2]-1} \frac{(-1)^{[2\alpha]-1+m} \binom{[2\alpha]-1}{m} \Gamma([2\alpha]-\alpha-m)}{\Gamma(\alpha-m)} \right. \\ \left. + \sum_{m=[\alpha+1/2]}^{[2\alpha]-1} \frac{(-1)^m \binom{[2\alpha]-1}{m} \Gamma(m-\alpha+1)}{\Gamma(m+\alpha+1-[2\alpha])} \right) \end{cases} \quad (13)$$

である。ただし、 $k(x, n) = \psi(n) - \log|x| - \frac{\pi i}{2} \text{sgn}(x)$ ,  $\psi(n) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}$ ,  $\gamma$  はオイラー定数、 $\psi(x) = \frac{d}{dx} \log \Gamma(x)$ ,  $\Gamma(x)$  はガンマ関数で、 $[x]$  は  $x$  を超えない最大の整数を表す。

ここで、上で導出されたグリーン関数の非正則性に関して述べておく。空間次元が1次元の場合、式(12)から  $\alpha \leq \frac{1}{2}$  の時はグリーン関数は  $x=0$  で非正則である。また2次元の場合は式(13)から  $\alpha \leq 1$  の場合に原点で非正則である。これらの場合、式(6)では展開係数  $c$  を求めることが出来ず正則解を式(7)の形で求めることはできない。特に空間次元が2次元の場合は薄膜モデルに対するグリーン関数は係数を除いて  $\ln r$  となり、正則解は式(7)の形では求められない。

### 3.2 スムーズネス指数の決定

式(12)あるいは式(13)で導出されたグリーン関数を用いて式(6)と式(7)から正則解を得るには二つのパラメータ、即ち正則化パラメータ  $\lambda$  とスムーズネス指数  $\alpha$  を事前に決定する必要がある。正則化パラメータの決定に関しては様々な決定方法が知られているので本論文では触れない(参考 [21][2])。本節では滑らかさの尺度を調整するスムーズネス指数の決定のみを取り上げる。

さて、2乗誤差最小の意味で最適なスムーズネス指数を導く為に Wiener フィルタを考えよう [9]。

観測作用素  $H$ 、原画像  $f(\vec{r})$ 、観測画像  $g(\vec{r})$ 、およびノイズ  $n(\vec{r})$  の間に

$$g(\vec{r}) = H \cdot f(\vec{r}) + n(\vec{r}) \quad (14)$$

の関係が成立すると仮定する。この時、原画像とノイズのパワースペクトル密度をそれぞれ、 $S_{ff}$ ,  $S_{nn}$  とすれば移動不変な Wiener フィルタのフーリエ成分は

$$\tilde{W}(k) = \frac{|\tilde{H}(k)|^2}{\tilde{H}(k)} \left[ |\tilde{H}(k)|^2 + \frac{S_{nn}(k)}{S_{ff}(k)} \right]^{-1} \quad (15)$$

とかける。サンプリングデータの位置は分かっているので  $\tilde{H}(k) = 1$  としてよい。  
よって式 (15) から

$$\tilde{W}(k) = \left[ 1 + \frac{S_{nn}(k)}{S_{ff}(k)} \right]^{-1} \quad (16)$$

が導かれる。今、各パワースペクトル密度が

$$\begin{aligned} S_{nn}(k) &\propto |k|^{-\beta} \\ S_{ff}(k) &\propto |k|^{-\gamma} \end{aligned} \quad (17)$$

ならば、式 (16) より Wiener フィルターによる正則解のフーリエ成分は

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \frac{\tilde{g}(\vec{k})}{1 + \lambda |k|^{\gamma-\beta}} \quad (18)$$

とかける。ここで、 $\lambda$  は定数。

一方、データサンプリングが連続的な場合、標準正則化による正則解のフーリエ成分は

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \frac{\tilde{g}(\vec{k})}{1 + (2\pi)^2 \lambda |k|^{2\alpha}} \quad (19)$$

であることが簡単に分かる。式 (18) と式 (19) の波数のべき指数を比較すると、

$$\alpha = \frac{1}{2}(\gamma - \beta) \quad (20)$$

の時、各々の正則解は定数係数を除き一致することがわかる。定数係数は適当なスケール変換によって取り除くことができるから重要なのはフィルターの形状を決めるべきの指数である。よって式 (20) に従ってスムーズネス指数を決定した正則化フィルターは Wiener フィルターと同等になり、このようにして得られた正則化フィルターは原画像と復元画像の 2 乗誤差を最小にするフィルターである。従って、ノイズと原データのパワースペクトル密度が事前に知られていれば式 (20) に従って 2 乗誤差最小の意味で最適なスムーズネス指数を決定することが可能である。

#### 4 面復元実験

面復元は、我々人間の視覚過程の初期段階では、両眼立体視の照合過程を経て得られたスパースな奥行き情報から 3 次元曲面を再構成する初期視覚問題である。また、レンジデータから奥行きを復元する問題も面復元問題として定式化できる。このように面復元問題はビジョンシステムを構築する上で重要な問題の一つである。

この節では一般化された滑らかさの尺度を用いた面復元と従来の薄板モデルによる面復元とを比較する計算機実験を行なった。

復元される面とノイズのパワースペクトル密度が知られている場合、薄板モデルによる面復元と一般化された滑らかさの尺度を用いた面復元を比較する実験を行った。原曲面はパワースペクトル密度が  $|k|^{-3}$  に比例し、分散を 1 に規格化した  $64 \times 64$  点データからなる。観測データは原曲面からサンプリング密度 5% のランダムサンプリングを行った。また、観測データには  $N(0, 0.1)$  のガウシアンノイズを加え、正規化パラメータは両者とも同一の値を持たせた。

この場合のスムーズネス指数の理論値は式 (20) で  $\gamma = 3, \beta = 0$  とおくことにより  $\alpha = 1.5$  である。なお、復元誤差を計るために次式の量を定義する。

$$e = \frac{\sigma_{f-f}^2}{\sigma_f^2} \quad (21)$$

ここで、 $\sigma_f^2$  は原曲面の分散、 $\sigma_{f-f}^2$  は原曲面と復元面との差の分散である。

図 1 が復元結果である。奥行きを濃淡で示してある。上左が原曲面、上右がサンプリング位置、下左がスムーズネス指数を  $\alpha = 1.5$  とした一般化された滑らかさの尺度に基づく正規化解、そして、下右が薄板モデル ( $\alpha = 2.0$ ) による正規化解である。定性的には  $\alpha = 1.5$  とした復元画像 (面) の方が原画像の外形や凹凸をより正確に表している。復元誤差  $e$  は  $\alpha = 1.5$  の時は 0.186 であり、薄板モデルに相当する  $\alpha = 2.0$  の場合は 0.298 であった。前者の方が補間誤差が少ないことがわかる。

図 2 は図 1 のそれぞれの曲面 (画像) に対するパワースペクトルを表示した。  $\alpha = 1.5$  と  $\alpha = 2$  のグラフを比べると波数の小さい方では  $\alpha = 1.5$  の場合の方が、スペクトル値およびグラフの傾き共に原曲面のスペクトルに近いことが分かる。一方、高波数側では両者の差異はないが、これは平均サンプリング幅に対応する波数以上の成分への正規化の影響はスムーズネス指数に依存しないことによると考えられる。

一方、式 (20) で決定されるスムーズネス指数の最適性を検証するために、観測データに  $N(0, 0.01)$  のガウシアンノイズを加えたサンプリング密度 1% の異なるサンプリングパターン 50 例の観測データからの復元誤差の平均を図 3 に示した。図中、上は  $\alpha$  が 1.01 から 2.00 までの範囲をプロットし、下は  $\alpha = 1.5$  近辺を拡大した図である。これらのグラフから復元誤差  $e$  は  $\alpha = 1.45$  で最小になっていることが分かる。理論から最適なスムーズネス指数は  $\alpha = 1.5$  であるから、実験結果はほぼ理論と一致している。

## 5 むすび

本研究の目的は、自然地形や自然画像に代表される非整数次のベキ指数をもったパワースペクトルを示す曲面（画像）に対して物理的に適切な解を与えるように標準正則化における滑らかさの尺度を一般化することであった。そのために初期視覚過程である面復元問題において従来から用いられてきた物理的には変形体の変形エネルギーを与える薄板モデルおよび薄膜モデルを非整数階の微積分演算子を導入することで統合、一般化し、より自由度の大きな面モデルを構成した。これにより、今まで離散的にしか定義されていなかった滑らかさの尺度を連続的に取り扱えるように一般化した。また、最小2乗フィルターとして知られる Wiener フィルターの理論から、原曲面と観測に伴うノイズのパワースペクトル密度が知られている場合には原曲面と復元面との誤差の2乗を最小にする意味で最適な滑らかさの尺度を決定する方法を与え、計算機実験によりこの手法の妥当性を検証した。

次に一般化された滑らかさの尺度の応用について述べておく。著者は以前、この応用として「スムーズネススペース」を提案した [8]。これはカーネルが座標とスムーズネス指数をパラメータとする拡散方程式を満足する、ガウシアンスケールスペース [20] と同様な性質をもつ空間である。しかし、ガウシアンスケールスペースがスケール変換によって得られる空間であるのに対して、スムーズネススペースは関数の連続性に着目し、関数の滑らかさを連続的に変化させることにより導出された空間である。つまり、画像を連続的にぼかす代わりに連続的に滑らかにすることが可能な空間である。また、一般化された滑らかさの尺度は薄膜および薄板の変形エネルギーを一般化したものであったから、薄膜や薄板といった物理的なアナロジーだけではモデル化が不十分な場合には一般化された滑らかさの尺度を応用することで新たな変形体モデルを構築することも可能である。

最後に、この論文では言及しなかったこと、および今後是非とも行なわなければならないことについて述べておく。

第1に滑らかさの尺度の自動決定である。復元する面と観測に伴うノイズに関する先見的な情報が得られないことが通常であるから、本論文で言及した滑らかさの尺度の決定に関する手法は汎用性がある手法であるとは言いがたい。我々が扱える情報は観測データのみであることから観測データから滑らかさの尺度を推定する何らかの手法が必要である。この手法に関して、GCV (generalized cross validation) によるパラメータ推定の方法 [5][21] や ABIC (ベイズ情報規範) の最小化による方法 [19] が考えられる。自然地形や自然画像、あるいはより一般的に我々の周囲から観測される画像は必ずしも滑らかさに関して等方性や均一性を持たないから、これ

らの手法を用いてスムーズネス指数を推定する際には、単に面全体に対するパラメータ推定を行なうのみではなく、局所的な推定を行なうことも重要であると思われる。

第2に面の不連続の導入である。従来、面の不連続を考慮した正則化は線過程 (line process) を導入したためにエネルギー汎関数が2次形式ではなくなり、その結果として Euler-Lagrange 方程式が非線形になり解の非最適性等が常に問題になってきた。そのため線形理論である標準正則化の枠内で不連続を扱うことは不可能であったが、最近、志沢 [16] は今まで1価関数にしか適用できなかった標準正則化を多価関数を扱えるように理論的拡張を行ない、異なった面の境界として不連続を扱えることを示唆した。従って、この拡張された標準正則化を用いれば線形理論の枠内で、しかも従来の線過程を用いること無しに不連続を扱うことが可能となるだろう。

このように正則化問題を線形理論の枠内で扱うことにより解の最適性を保証して正則解を計算し、さらに画像の非等方性や不均一性を考慮することでより実用性の高い正則化手法を生み出すことは工学的に応用する上で重要であると考えられる。

## 謝辞

御討論頂いた志沢雅彦主任研究員を初め、ATR 人間情報通信研究所ならびに ATR 視聴覚機構研究所の皆様へ感謝致します。また、本研究のきっかけを与えてくださった NTT ヒューマンインターフェース研究所の曾根原 登 主幹研究員へ感謝致します。

## 参考文献

- [1] Duchon J: "Spline minimizing rotation-invariant semi-norms in Sobolev spaces," *Constructive Theory of Functions of Several Variables*, Berlin, Springer-Verlag(1977).
- [2] Galatsanos N. P. and Katsaggelos A. K.: "Methods for choosing the regularization parameter and estimation the noise variance in image restoration and their relation," *IEEE Trans. Image Processing*, **1**, 3, pp.322-336(1992).
- [3] Horn B. K. P. and Schunck B. G.: "Determining optical flow," *Artifi. Intell.*, **17**, pp.185-203(1981)
- [4] Ikeuchi K. and Horn B. K. P.: "Numerical shape from shading and occluding boundaries," *Artifi. Intell.*, **17**, pp.141-184(1981)
- [5] Maeda J. and Sakabe T.: "Estimation of optimal regularization parameter in an iterative anisotropic image restoration method," *Proc. of the 8th Scandinavian conf. on image analysis*, **1**, pp.191-198(1993)
- [6] Mandelbrot B. B.: *The Fractal Geometry of Nature*, San Francisco CA, Freeman(1982).
- [7] Meinguet J.: "Multivariate interpolation at arbitrary points made simple," *J. Appl. Math. Phys.*, **30**, pp.292-304(1979)
- [8] 水谷 博之: "一般化微積分演算子を用いた標準正則化理論の拡張とスムーズネス空間の性質について," 電子情報通信学会技術研究報告, PRU92-130, pp.93-99(1992)
- [9] Pentland A. P.: "Physically-Based Dynamical Model for Image Processing and Recognition," *Mustererkennung 1990, Informatik-Fachberichte 254*, pp.171-193, Springer Verlag(1990)
- [10] Pentland A. P.: "Fractal-based description of natural scenes," *IEEE Trans. PAMI*, **6**, 6, pp.661-674(1984)
- [11] Poggio T., Torre V. and Koch C.: "Computational vision and regularization theory," *Nature*, **317**, pp.314-319(1985)

- [12] Poggio T., Voorhees H. and Yuille A.: "A regularized solution to edge detection," *J. Complexity*, 4, pp.106-123(1988)
- [13] Poggio T. A. and Girosi F.: "Networks for approximation and learning," *Proc. IEEE*, 78, 9, pp.1481-1497(1990)
- [14] Riesz M.: "L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy," *Acta. Math.*, 81, pp.10-16(1949)
- [15] Szeliski R.: *Bayesian Modeling of Uncertainty in Low-level Vision*, chap.4, Kluwer Academic Pub., Norwell, Massachusetts(1989)
- [16] 志沢 雅彦: "標準正則化理論の多価関数への拡張と多重表面の復元," 電子情報通信学会技術研究報告, NC93-34, pp.25-32(1993)
- [17] Terzopoulos D.: "The computation of visible-surface representations," *IEEE Trans. PAMI*, 10, 4, pp.417-438(1988)
- [18] Tikhonov A. N.: *Solutions of Ill-Posed Problems*, Washington, DC, Winston and Sons(1977)
- [19] 辻 宏之, 大森 浩充, 佐野 昭: "先験情報を利用した一般化特異値分解に基づく信号外挿," 電子情報通信学会論文誌 A, **J75-A**, 4, pp.718-725(1992)
- [20] Witkin A. P.: "Scale space filtering," *Proc. Int. Joint Conf. Artif. Intell.*, Karlsruhe(1983)
- [21] Wahba G.: *Spline Models for Observational Data*, pp.45-65, Philadelphia, PA, SIAM(1990)

## 付録

### 付録 1 一般化微積分演算子の導出

実数次の微分演算を定義するために連続関数  $f(x)$  の  $n$  階の微分 ( $n$  は整数) を考えよう。  $f(x)$  のフーリエ変換  $\tilde{f}(k) = 1/2\pi \int f(x)e^{-ikx}dx$  を用いると  $n$  階微分は

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \int_{-\infty}^{\infty} (ik)^n \tilde{f}(k) e^{ikx} dk \quad (1.1)$$

と表される。  $(ik)^\alpha = e^{\alpha \text{Log}(ik)}$  ( $\text{Log}$  は対数関数の主値) と決めると、  $\text{Log}(ik) = \log|k| + \text{sgn}(k)\frac{\pi}{2}i$  であることに注意して、式 (1.1) から一般化微積分演算子  $D_x^\alpha$  を次式で定義する。

$$D_x^\alpha f(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha \text{sgn}(k)\frac{\pi i}{2}} |k|^\alpha \tilde{f}(k) e^{ikx} dk \quad (1.2)$$

これは  $\alpha$  が正整数のときは微分演算を、負整数のときは積分演算を実行する。また、  $D_x^\alpha$  は次の公式群を満たす。

$$D_x^0 = f(x) \quad (1.3)$$

$$D_x^n f(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.4)$$

$$D_x^\alpha \cdot D_x^\beta f(x) = D_x^{\alpha+\beta} f(x) \quad (1.5)$$

$$D_x^{*\alpha} \cdot D_x^\alpha f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |k|^{2\alpha} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk \quad (1.6)$$

ただし、  $D_x^{*\alpha}$  は  $D_x^\alpha$  の共役な演算子。

### 付録 2 グリーン関数の導出

式 (11) に対する  $n$  次元グリーン関数を  $G_n^\alpha(x)$  と書くと、  $n = 1, 2$  に対してグリーン関数は

$$G_1^\alpha(|x|) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |k|^{-2\alpha} e^{ikx} dk \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} G_2^\alpha(r) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} |k|^{-2\alpha} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d\vec{k} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{k J_0(kr)}{k^{2\alpha}} dk \end{aligned} \quad (2.2)$$

である。式 (2.1) の計算は  $|k|^{-2\alpha}$  を超関数と見なせば計算できて式 (12) を得る。また、式 (2.2) の積分計算は  $1 < \alpha$  の場合、非積分関数の原点での特異性のために発散する。しかしグリーン関数の計算では無限大の定数項は無視できるから  $1 < \alpha$  の

場合も発散積分の有限部分としてグリーン関数を計算すればよい。すなわち式(2.2)の代わりに次式を計算すればよい。

$$G_2^\alpha(r) = \frac{1}{2\pi} \text{pf} \int_0^\infty k^{1-2\alpha} J_0(kr) dk \quad (2.3)$$

ただし、 $\text{pf} \int \cdots dk$  は発散積分の有限部分を表す。式(2.3)から式(13)を導く際には

$$\text{pf} \int_0^\infty k^{1-2\alpha} J_0(kr) dk = \begin{cases} \frac{-1}{(2\alpha-2)!} \int_0^\infty J_0^{(2\alpha-1)}(kr) \log k dk & (2\alpha = \text{整数}) \\ \frac{\int_0^\infty k^{[2\alpha]-2\alpha} J_0^{([2\alpha]-1)}(kr) dk}{\prod_{n=1}^{[2\alpha]-1} (2\alpha-n-1)} & (2\alpha \neq \text{整数}) \end{cases} \quad (2.4)$$

と

$$\int_0^\infty \log k J_\nu(kr) dk = \frac{\psi\left(\frac{\nu+1}{2}\right) + \log(2/r)}{r} \quad (2.5)$$

さらに、

$$\int_0^\infty k^{\alpha-1} J_\nu(rk) dk = \frac{2^{\alpha-1} \Gamma((\alpha+\nu)/2)}{r^\alpha \Gamma((\nu-\alpha)/2+1)} \quad (2.6)$$

の関係を用いた。

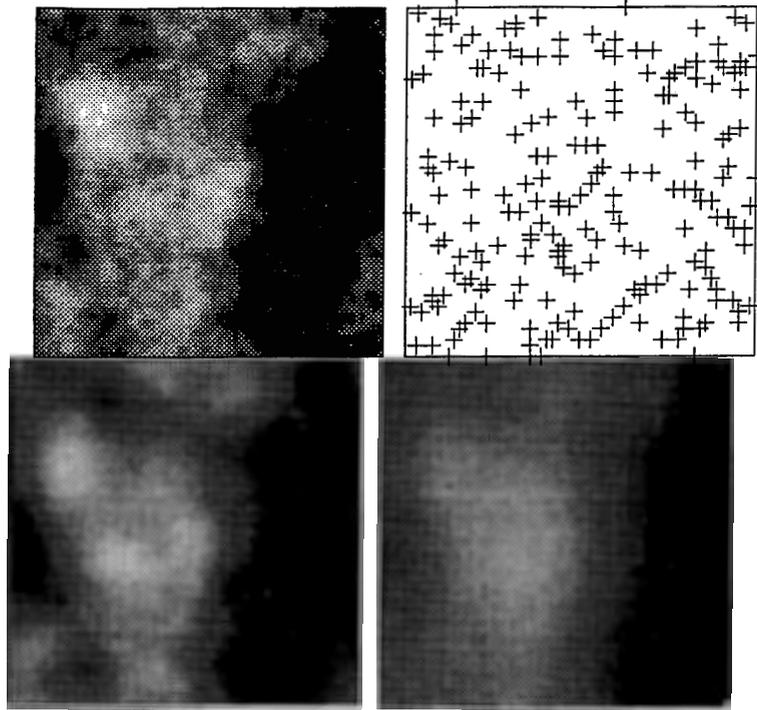


図 1: スパースデータからの面復元の例

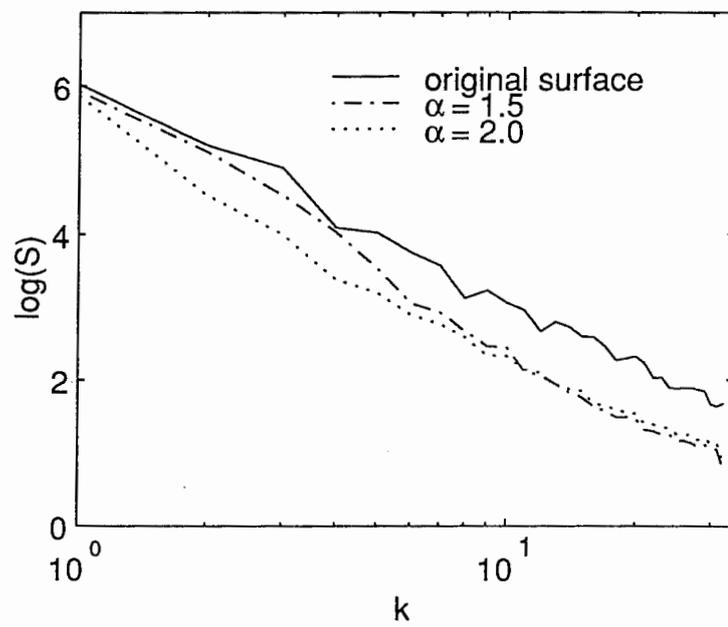


図 2: 復元面のパワースペクトル

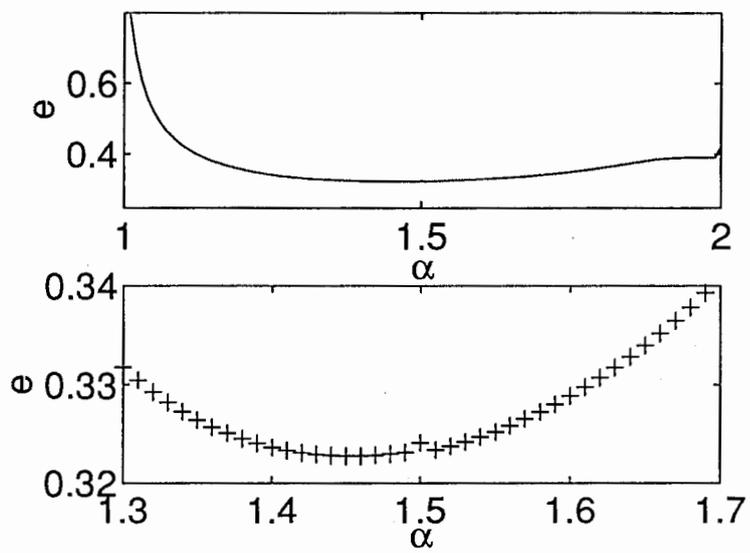


图 3: 復元誤差