

TR-H-027

0044

標準正則化理論の多価関数への拡張(1)
—超並列緩和計算によるなめらかな多重表面の復元—

Masahiko SHIZAWA

志沢 雅彦

1993. 9. 13

ATR 人間情報通信研究所

〒619-02 京都府相楽郡精華町光台 2-2 ☎07749-5-1011

ATR Human Information Processing Research Laboratories

2-2, Hikaridai, Seika-cho, Soraku-gun, Kyoto 619-02 Japan

Telephone: +81-7749-5-1011

Facsimile: +81-7749-5-1008

標準正則化理論の多価関数への拡張 (1)
— 超並列緩和計算によるなめらかな多重表面の復元 —

志沢 雅彦

ATR 人間情報通信研究所

あらまし

視覚情報処理における複数の重なり合った表面の復元問題（透明視（トランスパレンシー）と呼ばれる）に代表される多価関数によるデータ近似を実現するために、標準正則化理論の拡張を試みる。従来の標準正則化理論は、関数がある滑らかさをもった一価関数であるという前提条件のもとでデータの関数近似をすることができたが、物体境界などにおいて関数が不連続になる場合は、線過程の様な滑らかさの切断を表現する補助的な場やそれと同等のメカニズムを導入する必要があった。また、多重表面の復元のための多層表現法も提案されているが、これもまた、データの所属を表す補助的な場を導入する必要があった。これらのアプローチのいずれも、エネルギー最小化問題が一般に非2次かつ非凸の非線形最適化問題となり、インプリメンテーションにかなりの工夫が必要であった。このために、この分野の研究は、この最適化をいかにうまく行うかに関心が集まっていた。本論文では、テンソル積の概念に基づいた多価関数の直接的表現法を提案し、これら補助的な場を導入しなくても、多価関数によるデータの関数近似問題を1個の2次元関数のエネルギー最小化問題に帰着できることを示す。したがって、この場合、Euler-Lagrange方程式は線形になり、従来の標準正則化理論のために用いられてきた最適値への収束が保証された最適化手法がほぼそのまま利用できる。さらに、この拡張された標準正則化理論を用いて透明視モデルのための2重表面復元の緩和型超並列アルゴリズムを導出し、シミュレーション結果を報告する。

キーワード:

標準正則化理論、多価関数、透明視、テンソル積、最適化問題、表面復元

Extension of the Standard Regularization Theory into Multi-Valued Functions: Reconstruction of Smooth Multiple Surfaces via Massively Parallel Relaxation

Abstract

An extension of the standard regularization theory is proposed for data approximations by multi-valued functions which are essential for such as the transparency problems in computational vision. Conventional standard regularization theory can approximate scattered data by a single-valued function which is smooth everywhere in the domain. However, to incorporate discontinuities of the functions, we need to introduce the line process or equivalent techniques for breaking the coherence or smoothness of the approximating functions. Recently, multi-layer representations have been utilized for multiple overlapping surface reconstruction. However, it should incorporate auxiliary fields for segmenting the given data. Further, these two different approaches share the difficulty in implementing optimizations of their energy functionals, since they become non-quadric, non-convex minimization problem with respect to unknown surface and auxiliary field parameters. In this paper, by using a direct representation for multi-fold surfaces based on tensor product, we show that the data approximation by a multi-valued function can be reduced to minimization of a single quadric functional. Therefore, since the Euler-Lagrange equation of the functional becomes linear, we can get benefit from simple relaxation techniques of guaranteed convergence to the optimal solution.

Keywords: Standard regularization theory, Multi-valued functions, Transparency, Tensor product, Optimization, Surface reconstruction.

もくじ

1	はじめに	4
2	多価標準正則化理論による2重表面の復元	6
2.1	2重表面復元のためのエネルギー汎関数	6
2.2	Gauss-Seidel法による最適化アルゴリズム	7
2.3	最急降下法による最適化アルゴリズム	9
2.4	シミュレーション実験と結果	10
3	多価標準正則化理論の一般論	11
3.1	スカラー値 h 価関数の場合	11
3.2	m 次元ベクトル値 h 価関数の場合: テンソル積表現	12
3.2.1	$h = 2, m = 2$ の場合の例	13
4	まとめ	14
	謝辞	16

1 はじめに

正則化理論 (regularization theory) は、視覚情報処理をはじめとする不良設定の逆問題を解くための一般的な理論的枠組である [12][13][22]。その中でも、いろいろな視覚情報からの滑らかな物体表面の復元は3次元世界を推定するための重要な手段である。人間も初期視覚や中期視覚、運動制御の問題を解くためにこの理論に基づいたメカニズムを用いているといわれている [12][15]。さらに、物体認識の様な高次の視覚機能においても正則化理論に基づいたモデルが提案されている [17]。より一般的には、学習 = 関数近似という視点から正則化理論に基づいた学習のニューラルネットワークモデル (正則化ネットワーク) が Poggio & Girosi によって提案されている [16]。

この様に、正則化理論は、視覚情報処理をはじめとした生体情報処理の基本原則として極めて基本的な役割を果たすとともに、汎用の逆問題や関数近似のための基礎理論として工学的にも極めて重要な数理的方法を提供する。しかし、未知関数に関して2次の汎関数の最小化問題として定式化される標準正則化理論 (Standard Regularization Theory) では、近似関数は空間の至るところで滑らかな一価関数であるという前提条件があった。したがって、例えば視覚情報処理において、物体の境界やかどにおける様な、表面の不連続、および、真に重なり合った複数の表面の復元が必要な透明視 (トランスペアレンシー) [9] [18] [19] [20] の場合を正しく扱うことができない。

近似関数の不連続を許容した正則化を行うためには、たとえば、Geman & Geman らの線過程 (line process) モデルの様に、滑らかさの伝播を不連続の位置で局所的に禁止するメカニズム [5]、Terzopoulos の滑らかさ拘束の重みを適応的に制御 [21] する方法など、不連続の検出と区分的に滑らかな表面の復元を同時に実現する方法が提案され、種々の変形や近似解法が試みられてきた [2][4]。そして、これらの方法は、人間の物体境界知覚やエッジ情報に基づいた視覚モジュール統合の基本メカニズムとしても用いられてきた [14]。

しかし、この様に滑らかさの程度を局所的に制御するだけでは、透明視の様に、真に重なり合った複数の表面に対応するデータが混在している場合には、ほとんど至るところで表面が不連続となってしまう。そこで、近年、コンピュータ・ビジョンや視覚の計算理論では多層表現 (multi-layer representation) と呼ばれる複数のレイヤーの集合として表面や運動を表現する手法がいくつか提案されてきている。例えば、Darrel & Pentland は、パターンの多層表現を用いて動画像の直接セグメンテーションを行い [3]、Wang & Adelson は、同様なメカニズムを用いてオプティカルフロー場の直接セグメンテーションを行った [23]。Kersten は、単眼の透明視において [9]、Madarasmi らは、両眼立体視において [11] それぞれ多層表現モデルによる表面の表現法を用いた多重表面の知覚モデルを提案している。しかし、これらの方法では、データが真に重なり合った場合を想定しておらず、表面のモデルは多重であるが、データは画像面の各点に1個づつしか与えることができなかった。そこで、安藤 [1] は、各データに表面への

所属を表す変数を割り当て、エネルギー汎関数のデータ項をその変数でスイッチすることにより、データの複数表面へのクラスタリングと滑らかな表面の復元を同時に行う方法を提案した。

一般に、これらの方法は、表面や運動のパラメータ以外に多数の補助パラメータを導入し、さらに、それらがエネルギー汎関数のデータ項に積の形にかかるため、その最小化問題は非2次かつ非凸の一般の最適化となり、もはや標準正則化理論の枠内では扱えず、局所最小解を避けるために、かなり複雑な最適化手法を導入しなければならなかった。例えば、エッジを保存した画像復元や、不連続を保存した区分的に滑らかな表面復元の問題に対して次の様なアプローチが採られてきた。Geman & Geman[5]は、線過程との結合マルコフ場モデルで表現し、それから導かれるエネルギー最小化問題に熱力学をモデルとした模擬焼きなまし (simulated annealing) 法 [10] を用いた。Blake & Zisserman[2]は、不連続を含むデータの滑らかな表面による近似にエネルギー関数の凸関数による近似と最適化を繰り返し行う Graduated Non-Convexity (GNC) アルゴリズムを提案している。Geiger & Girosi [4]は、平均場近似 (mean field approximation) と呼ばれる統計物理学の近似手法を用いて、確率的緩和法によらずに決定論的な最適化を行う方法を提案した。多層表現モデルにおいても、Darrel & Pentland[3]、Kersten[9]、Madarasmiら [11]は模擬焼きなまし法を用いており、安藤 [1]は、平均場近似を用いている。模擬焼きなましは、数学的には大局的最適解への収束が保証されているものの、計算量が膨大であり、また、焼きなましの温度のスケジューリングが難しい。平均場近似や GNC 法は、実用的には十分な場合もあるものの、大局的最適値が得られる保証はない。

本論文では、エネルギー関数のレベルで補助的な場を一切導入しなくても、テンソル積を用いて、多価関数のための正則化問題を一価のベクトル値関数のための標準正則化問題に変換できることを指摘する。すなわち、多価関数の正則化についても、2次のエネルギー汎関数の最適化問題に帰着することができるのである。(本稿では、この多価関数に拡張された標準正則化理論を多価標準正則化理論 (Multi-Valued Standard Regularization Theory) と呼ぶことにする。)

正則化理論によって2次元平面上でスパースに配置されたデータの関数近似を行う繰り返しアルゴリズムは、超並列計算機や生体情報処理を想定したマルコフ場モデル、そのアナログ抵抗ネットワークによる実現 [13] などの応用がある。また、一般次元における標準正則化理論は、 n 次元空間にまばらに分布した m 次元データが与えられた時に n 次元実数空間 R^n から m 次元実数空間 R^m への写像、すなわち $R^n \times R^m$ のグラフあるいは超曲面を生成するための学習の理論とも考えられる [16]。したがって、本理論は、標準正則化理論の適用範囲と柔軟性をさらに大きく広げる可能性がある。

以下では、まず、第2章において、 $n = 2, m = 1$ の2価スカラー値関数の場合に相当する2次元2重表面のスパースなデータからの正則化について、その離散近似にもとづいて Gauss-Seidel 法と最急降下法による超並列繰り返し計算アルゴリズムを導

き、シミュレーションを行う。これは、視覚情報処理における透明視の表面復元のモデルとして基本的な貢献をするものである。

第3章では、多価標準正則化理論の一般論を述べる。まず、 n 次元空間における h 価スカラー値関数に拡張した場合の定式化を述べる。次に、 n 次元空間における h 価 m 次元ベクトル値関数の場合について、テンソル積の概念を用いた一般論を述べる。最後に、例として、 $h=2, m=2$ の場合を展開する。

2 多価標準正則化理論による2重表面の復元

本章では、2次元空間に2層に分布した値を2枚の滑らかな曲面で近似する問題を解く正則化アルゴリズムを導出し、多価標準正則化理論を説明する。ビジョンにおいて透明視(トランスペアレンシー)と呼ばれる問題では、一般に図1の様な複数の重なり合った表面を復元する必要がある。ここで、図の上側の面の様に、いずれかの表面に対応する一部領域のデータが欠けている部分をも乗り越えて空間全体を覆う複数の滑らかな表面で近似される必要があることに注意する。このような復元が可能であるためには各点近傍の局所最適化ではなく、正則化理論の様な大局的な最適化のアルゴリズムが本質的に必要である。

2.1 2重表面復元のためのエネルギー汎関数

普通の一価関数によるデータ近似のための標準正則化問題は次の汎関数のエネルギー最小化の形に表される [12]。

$$E^{(1)}[f] = \sum_{i=1}^N \left(y_{(i)} - f(x_{(i)}) \right)^2 + \lambda \|Sf(x)\|^2 \quad (1)$$

ここで、 S は正則化作用素、 λ は正則化パラメータ、 $\| \cdot \|$ は関数空間のノルムである。 $(x_{(i)}, y_{(i)})$ は、 i 番目のデータの座標と値を表し、 N は、総データ数を表す。

ここで、式(1)のデータ項をみると曲面 $y = f(x)$ がこのデータの拘束条件になっていることがわかる。そこで、2重表面の場合には、関数 $f_1(x)$ および $f_2(x)$ によって定義される2枚の表面 $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ を考える(図2参照)。この2枚の表面が同時に空間 (x, y) に存在する場合、それに対応するデータの拘束条件は、

$$(y - f_1(x))(y - f_2(x)) = y^2 - (f_1(x) + f_2(x))y + f_1(x)f_2(x) = 0 \quad (2)$$

という1個の方程式で表されることに注意しよう(図2)。ここで、この方程式は、各データが、曲面 $y = f_1(x)$ と $y = f_2(x)$ のうちの少なくとも一方の上に乗るための必要十分条件を数学的に厳密に表現している。実際には、データは誤差をもっているので、各データ点は、これらの曲面のどちらか一方によって近似されると考える。このようにすると、データが、どちらの曲面に属するかを明示することなく一個の拘束方程式で表現できるという特長がある。

ここで、次の様に、関数 $F(x)$ 、 $G(x)$ を定義する。

$$\begin{aligned} F(x) &= f_1(x)f_2(x), \\ G(x) &= -(f_1(x) + f_2(x)) \end{aligned} \quad (3)$$

すると、データの拘束式 (2) は、未知関数 $F(x)$ および $G(x)$ に関して線形になる。従って、もとの関数 $f_1(x)$ および $f_2(x)$ に正則化を行う代わりに関数 $F(x)$ および $G(x)$ に滑らかさの拘束を課すことにすれば、エネルギー汎関数はデータ項、正則化項共に 2 次形式となり、標準正則化理論が応用できる。ここで、変換 (3) の逆変換は、次式で計算できる。

$$f_1(x), f_2(x) = \frac{1}{2} \left[-G(x) \pm \sqrt{\{G(x)\}^2 - 4F(x)} \right] \quad (4)$$

このように、これら 2 組の関数は、連続かつ微分可能な写像によって相互に対応付けられるので、 $f_1(x)$ および $f_2(x)$ のかわりに $F(x)$ および $G(x)$ に滑らかさの拘束を課しても不自然な結果にはならないと予想される。ただし、ここで、 $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ と右辺の 2 個の値との対応は得られないことに注意する。これは、拘束式 (2) が $f_1(x)$ と $f_2(x)$ に関して対称であるために避けることのできない問題である。また、変換 (3)、逆変換 (4) 共に各点 x で完全に独立に閉形式で計算できるので、これにともなう計算量の増加は、例えば正則化のための緩和計算に較べればほとんど無視できる。

以上の考察から、2 重表面復元のための正則化は、次の 2 次エネルギー汎関数の最小化によって定義される標準正則化によって実現できる。

$$\begin{aligned} E^{(2)}[F, G] &= \sum_{i=1}^N \left\{ F(x_{(i)}) + G(x_{(i)})y_{(i)} + (y_{(i)})^2 \right\}^2 \\ &\quad + \lambda_F \|S_F F(x)\|^2 + \lambda_G \|S_G G(x)\|^2 \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、汎関数 (5) の最小化によって得られる関数 $F(x)$ 、 $G(x)$ は、データの誤差の影響を受けるので、式 (4) の平方根が実数になる保証はない。したがって、実際の計算では、

$$\{G(x)\}^2 - 4F(x) \geq 0 \quad (6)$$

という制約条件のもとで、最適化を行う必要がある。

この標準正則化問題は、視覚情報処理におけるオプティカルフローの正則化 [8] の場合と同様な、2 次元ベクトル値関数 ($F(x)$ 、 $G(x)$) の標準正則化問題と見ることができ。従って、従来から用いられてきた 2 次元ベクトル場の標準正則化についての緩和計算法やそのアナログ抵抗回路による実現がほぼそのまま有効である。

2.2 Gauss-Seidel 法による最適化アルゴリズム

本節では、式 (5) を $x = (x_1, x_2) \in Z^2$ の正方格子上で離散化して、Gauss-Seidel 法による超並列計算向きの繰り返しアルゴリズムを導く。正則化項にはよく用いられる

薄膜 (membrane) モデルを用いる。薄膜モデルの正則化作用素は 1 階微分の $S_F = S_G = \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$ である。以下、変数 x_1, x_2 は格子点の整数座標値をとるものとする。するとエネルギー汎関数 (5) は変数 $F_{x_1, x_2}, G_{x_1, x_2}$ に関する次のエネルギー関数で近似される。

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(2)}(F, G) &= \sum_{i=1}^N \left\{ F_{x_1(i), x_2(i)} + G_{x_1(i), x_2(i)} y(i) + (y(i))^2 \right\}^2 \\ &+ \sum_{(x_1, x_2) \in Z^2} \lambda_F \{ (F_{x_1, x_2} - F_{x_1-1, x_2})^2 + (F_{x_1, x_2} - F_{x_1, x_2-1})^2 \} \\ &+ \sum_{(x_1, x_2) \in Z^2} \lambda_G \{ (G_{x_1, x_2} - G_{x_1-1, x_2})^2 + (G_{x_1, x_2} - G_{x_1, x_2-1})^2 \} \quad (7) \end{aligned}$$

ここで、 $F_{x_1, x_2}, G_{x_1, x_2}$ は、それぞれ、関数 $F(x), G(x)$ の格子点 $(x_1, x_2) \in Z^2$ における値で、 $\{(x_1(i), x_2(i)), y(i)\}$ ($i = 1, \dots, N$) は、与えられたスパースなデータ点とその値である。このエネルギー関数の最小化問題から、変数 $F_{x_1, x_2}, G_{x_1, x_2}$ に関する偏微分を零とおいて、次の平衡条件 (Euler-Lagrange 方程式) が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}^{(2)}(F, G)}{\partial F_{x_1, x_2}} &= 2 \left[\sum_{i=1}^N \delta_{x_1, x_1(i)} \delta_{x_2, x_2(i)} \left\{ F_{x_1(i), x_2(i)} + G_{x_1(i), x_2(i)} y(i) + (y(i))^2 \right\} \right] \\ &+ 2\lambda_F (F_{x_1, x_2} - \bar{F}_{x_1, x_2}) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{E}^{(2)}(F, G)}{\partial G_{x_1, x_2}} &= 2 \left[\sum_{i=1}^N \delta_{x_1, x_1(i)} \delta_{x_2, x_2(i)} \left\{ F_{x_1(i), x_2(i)} y(i) + G_{x_1(i), x_2(i)} (y(i))^2 + (y(i))^3 \right\} \right] \\ &+ 2\lambda_G (G_{x_1, x_2} - \bar{G}_{x_1, x_2}) = 0 \quad (8) \end{aligned}$$

ここで、 $\delta_{a,b}$ は、Kronecker のデルタであり、 $a = b$ の時に 1 をとり、それ以外の場合に、0 をとる。 \bar{F}_{x_1, x_2} と \bar{G}_{x_1, x_2} は、それぞれ 4 近傍の値 $F_{x_1-1, x_2}, F_{x_1+1, x_2}, F_{x_1, x_2-1}, F_{x_1, x_2+1}$ 、および、 $G_{x_1-1, x_2}, G_{x_1+1, x_2}, G_{x_1, x_2-1}, G_{x_1, x_2+1}$ の平均であり、次式で定義される。

$$\begin{aligned} \bar{F}_{x_1, x_2} &= \frac{1}{4} (F_{x_1+1, x_2} + F_{x_1-1, x_2} + F_{x_1, x_2+1} + F_{x_1, x_2-1}), \\ \bar{G}_{x_1, x_2} &= \frac{1}{4} (G_{x_1+1, x_2} + G_{x_1-1, x_2} + G_{x_1, x_2+1} + G_{x_1, x_2-1}) \quad (9) \end{aligned}$$

ここで、データのみから計算できる次の量を定義する。

$$\begin{aligned} A_{x_1, x_2} &= \sum_{i=1}^N \delta_{x_1, x_1(i)} \delta_{x_2, x_2(i)}, \\ B_{x_1, x_2} &= \sum_{i=1}^N \delta_{x_1, x_1(i)} \delta_{x_2, x_2(i)} y(i), \\ C_{x_1, x_2} &= \sum_{i=1}^N \delta_{x_1, x_1(i)} \delta_{x_2, x_2(i)} (y(i))^2, \\ D_{x_1, x_2} &= \sum_{i=1}^N \delta_{x_1, x_1(i)} \delta_{x_2, x_2(i)} (y(i))^3 \quad (10) \end{aligned}$$

これら $A_{x_1, x_2}, B_{x_1, x_2}, C_{x_1, x_2}, D_{x_1, x_2}$ は、データが存在しない格子点 (x_1, x_2) では、すべて零になる。また、この定式化では、同一点 x に複数のデータが与えられることも許される。したがって、入力データ自身が多価であることも当然許される。このとき、平衡条件 (8) は、次の様に簡単化される。

$$\begin{aligned} (A_{x_1, x_2} + \lambda_F) F_{x_1, x_2} + B_{x_1, x_2} G_{x_1, x_2} &= \lambda_F \bar{F}_{x_1, x_2} - C_{x_1, x_2}, \\ B_{x_1, x_2} F_{x_1, x_2} + (C_{x_1, x_2} + \lambda_G) G_{x_1, x_2} &= \lambda_G \bar{G}_{x_1, x_2} - D_{x_1, x_2} \end{aligned} \quad (11)$$

この連立方程式を F_{x_1, x_2} および G_{x_1, x_2} について解くと、次式を得る。

$$\begin{aligned} F_{x_1, x_2} &= \frac{\lambda_F (C_{x_1, x_2} + \lambda_G) \bar{F}_{x_1, x_2} - \lambda_G B_{x_1, x_2} \bar{G}_{x_1, x_2} + B_{x_1, x_2} D_{x_1, x_2} - C_{x_1, x_2} (C_{x_1, x_2} + \lambda_G)}{(A_{x_1, x_2} + \lambda_F)(C_{x_1, x_2} + \lambda_G) - B_{x_1, x_2}^2}, \\ G_{x_1, x_2} &= \frac{-\lambda_F B_{x_1, x_2} \bar{F}_{x_1, x_2} + \lambda_G (A_{x_1, x_2} + \lambda_F) \bar{G}_{x_1, x_2} + B_{x_1, x_2} C_{x_1, x_2} - D_{x_1, x_2} (A_{x_1, x_2} + \lambda_F)}{(A_{x_1, x_2} + \lambda_F)(C_{x_1, x_2} + \lambda_G) - B_{x_1, x_2}^2} \end{aligned} \quad (12)$$

これから、Gauss-Seidel 法による次の緩和アルゴリズムが導かれる。

$$\begin{aligned} F_{x_1, x_2}^{[k+1]} &= a_{x_1, x_2} \bar{F}_{x_1, x_2}^{[k]} + b_{x_1, x_2} \bar{G}_{x_1, x_2}^{[k]} + p_{x_1, x_2}, \\ G_{x_1, x_2}^{[k+1]} &= c_{x_1, x_2} \bar{F}_{x_1, x_2}^{[k]} + d_{x_1, x_2} \bar{G}_{x_1, x_2}^{[k]} + q_{x_1, x_2} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、 k は、繰り返しの回数を表すインデクスであり、

$a_{x_1, x_2}, b_{x_1, x_2}, c_{x_1, x_2}, d_{x_1, x_2}, p_{x_1, x_2}, q_{x_1, x_2}$ は、あらかじめ各点で独立に計算できる量で、次の様に定義される。

$$\begin{aligned} a_{x_1, x_2} &= \lambda_F (C_{x_1, x_2} + \lambda_G) / U_{x_1, x_2}, \\ b_{x_1, x_2} &= -\lambda_G B_{x_1, x_2} / U_{x_1, x_2}, \\ c_{x_1, x_2} &= -\lambda_F B_{x_1, x_2} / U_{x_1, x_2}, \\ d_{x_1, x_2} &= \lambda_G (A_{x_1, x_2} + \lambda_F) / U_{x_1, x_2}, \\ p_{x_1, x_2} &= \{B_{x_1, x_2} D_{x_1, x_2} - C_{x_1, x_2} (C_{x_1, x_2} + \lambda_G)\} / U_{x_1, x_2}, \\ q_{x_1, x_2} &= \{B_{x_1, x_2} C_{x_1, x_2} - D_{x_1, x_2} (A_{x_1, x_2} + \lambda_F)\} / U_{x_1, x_2} \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、 $U_{x_1, x_2} = (A_{x_1, x_2} + \lambda_F)(C_{x_1, x_2} + \lambda_G) - B_{x_1, x_2}^2$ とおいた。特に、データの存在しない点 (x_1, x_2) では、

$a_{x_1, x_2} = d_{x_1, x_2} = 1, b_{x_1, x_2} = c_{x_1, x_2} = p_{x_1, x_2} = q_{x_1, x_2} = 0$ であり、単なる充填過程になる。このアルゴリズムは、図3の様な網状の超並列型ネットワークで実現できる。

2.3 最急降下法による最適化アルゴリズム

エネルギー汎関数 (5) の最小化問題の解は、次式で表される線形ダイナミカルシステムの平衡点を与える関数 $F(x), G(x)$ として計算することも可能である。

$$\frac{dF(x)}{dt} = -\omega \frac{\delta E^{(2)}[F, G]}{\delta F(x)}, \quad \frac{dG(x)}{dt} = -\omega \frac{\delta E^{(2)}[F, G]}{\delta G(x)} \quad (15)$$

ここで、記号 δ は変分、 ω は正定数を表す。これを離散化すると、最急降下法による次の緩和アルゴリズムが導かれる。

$$\begin{aligned} F_{x_1, x_2}^{[k+1]} &= F_{x_1, x_2}^{[k]} - 2\omega \{ (A_{x_1, x_2} + \lambda_F) F_{x_1, x_2}^{[k]} \\ &\quad + B_{x_1, x_2} G_{x_1, x_2}^{[k]} + C_{x_1, x_2} - \lambda_F \bar{F}_{x_1, x_2}^{[k]} \}, \\ G_{x_1, x_2}^{[k+1]} &= G_{x_1, x_2}^{[k]} - 2\omega \{ B_{x_1, x_2} F_{x_1, x_2}^{[k]} \\ &\quad + (C_{x_1, x_2} + \lambda_G) G_{x_1, x_2}^{[k]} - D_{x_1, x_2} - \lambda_G \bar{G}_{x_1, x_2}^{[k]} \} \end{aligned} \quad (16)$$

この方法は、収束が遅いのでデジタル計算には向かないが、アナログ抵抗回路網による正則化 [13] の計算機シミュレーションとしては意味がある。

2.4 シミュレーション実験と結果

超並列計算機 CM-2 を用いて 2 重表面復元のシミュレーション実験を行った。x の空間を 512×512 の 2 次元格子で近似し、Gauss-Seidel 法による緩和計算を実現した。本節では、次の 4 通りの実行結果のみを報告する。

実験 1 (図 4) では、図 4(a) に示した様な、2 枚の平面 $y = f_1(x) = 0.8$ 、 $y = f_2(x) = -0.8$ に、標準偏差 $\sigma = 0.05$ のガウシアンノイズを重畳し、 $f_1(x)$ のデータをくし状に取り除いたテストデータを用いた。データ数は、 $f_1(x)$ が約 6000 点、 $f_2(x)$ が 10000 点である。

実験 2、3、4 (図 5、図 6、図 7) では、テストデータの生成に次の式を用いた。

$$\begin{aligned} f_1(x) &: -0.5 + N(0, \sigma^2), \\ f_2(x) &: 2 \sin 3\pi \left(\frac{x_2 - 256}{512} \right) + N(0, \sigma^2) \end{aligned} \quad (17)$$

すなわち、定数関数と正弦関数からなる 2 価関数にそれぞれガウシアンノイズ $N(0, \sigma^2)$ を加えて生成した。 $N(m, \sigma^2)$ は、平均 m 、分散 σ^2 のガウシアンノイズを表す。関数 $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ に関して、それぞれ、 N_1 、 N_2 個の座標 x を乱数で生成し、ノイズを加えた関数値を計算して、合計 $N = N_1 + N_2$ 個のデータ $\{x_{(i)}, y_{(i)}\} (i = 1, 2, \dots, N)$ を生成した。

ここで、実験に用いたパラメータは次の通りである。

- 実験 2 : $N_1 = 10000$ 、 $N_2 = 20000$ 、 $\sigma = 0.05$
- 実験 3 : $N_1 = 10000$ 、 $N_2 = 10000$ 、 $\sigma = 2.0$
- 実験 4 : $N_1 = 10000$ 、 $N_2 = 1000$ 、 $\sigma = 0.05$

なお、初期値は、すべての実験で $F_{x_1, x_2}^{[0]} = G_{x_1, x_2}^{[0]} = 0$ とした。各実験に対して、平衡点へ達する前の状態 (各図 (b)) と、平衡点に達した後の結果 (各図 (c), (d)) を示した。

実験1では、上の面のデータが完全に欠けている部分でも自然に表面の補間が行われていることに注目すべきである。

実験2では、交点のところでは、曲面同士が接触すべきであるが、そうはならなかった。

実験3では、ノイズをかなり大きくしてもそれなりの結果が出ることが示された。

実験4では、データの密度が、2個の関数の間でかなり異なる場合(この例では10倍)でも、正しい表面が復元できることが示された。

3 多価標準正則化理論の一般論

本章では、多価標準正則化理論の一般論について述べる。まず、スカラー値 ($m = 1$) の h 価関数に拡張した場合の一般論をのべ、次に、テンソル積を用いた m 次元ベクトル値の h 価関数の場合の定式化について簡単に述べる。

3.1 スカラー値 h 価関数の場合

式(2)と同様にして、 h 個の曲面 $y = f_i(\mathbf{x})$ ($i = 1, 2, \dots, h$) を同時に表現する方程式は、

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^h (y - f_i(\mathbf{x})) &= y^h - \pi_1^{(h)}(\mathbf{x})y^{h-1} + \pi_2^{(h)}(\mathbf{x})y^{h-2} - \dots \\ &+ (-1)^h \pi_h^{(h)}(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、 $\pi_k^{(h)}(\mathbf{x})$ は、 h 個の関数 $f_i(\mathbf{x})$ ($i = 1, \dots, h$) の基本対称式として次の様に定義される関数である。

$$\begin{aligned} \pi_1^{(h)}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^h f_i(\mathbf{x}), \\ \pi_2^{(h)}(\mathbf{x}) &= \sum_{i_1=1}^h \sum_{i_2=i_1+1}^h f_{i_1}(\mathbf{x})f_{i_2}(\mathbf{x}), \\ &\dots, \\ \pi_h^{(h)}(\mathbf{x}) &= f_1(\mathbf{x})f_2(\mathbf{x})\cdots f_h(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (19)$$

2 価関数の場合と同様にして、 $f_i(\mathbf{x})$ の代わりに、 $\pi_k^{(h)}(\mathbf{x})$ を未知関数とした正則化問題を考える。このとき、 $\pi_k^{(h)}(\mathbf{x})$ から $f_i(\mathbf{x})$ への逆変換は、各点 \mathbf{x} において次に示す ϕ に関する h 次代数方程式の実数解として定義される。

$$\begin{aligned} \Lambda^{(h)}(\phi) &= \phi^h - \pi_1^{(h)}(\mathbf{x})\phi^{h-1} + \pi_2^{(h)}(\mathbf{x})\phi^{h-2} - \dots \\ &+ (-1)^h \pi_h^{(h)}(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、各点 \mathbf{x} において求まる h 個の実数解 ϕ_j ($j = 1, 2, \dots, h$) が、 $f_i(\mathbf{x})$ のどれに対応するかは原理的に決まらない。エネルギー汎

関数は、次式で定義する。

$$\begin{aligned}
 E^{(h)}[\pi_1^{(h)}, \pi_2^{(h)}, \dots, \pi_h^{(h)}] = & \\
 \sum_{i=1}^N \{y_{(i)}^h - \pi_1^{(h)}(\mathbf{x}_{(i)})y_{(i)}^{h-1} + \pi_2^{(h)}(\mathbf{x}_{(i)})y_{(i)}^{h-2} - \dots & \\
 + (-1)^h \pi_h^{(h)}(\mathbf{x}_{(i)})\}^2 + \sum_{k=1}^h \lambda_k \|S_k^{(h)} \pi_k^{(h)}(\mathbf{x})\|^2 & \quad (21)
 \end{aligned}$$

この汎関数は、データ項、正則化項ともに未知関数 $\pi_k^{(h)}(\mathbf{x})$ に関して2次であるから、標準正則化理論の枠内で最適化問題の解を求めることができる。

この方法では、最後に h 次代数方程式を解かなければならないが、一般に、5 次以上の代数方程式には解析解が存在しない。しかし、Durand-Kerner 法として知られる次の反復法によって、すべての解を同時に求める事ができる。

$$\phi_j^{[k+1]} = \phi_j^{[k]} - \frac{\Lambda(\phi_j^{[k]})}{\prod_{i=1, i \neq j}^h (\phi_j^{[k]} - \phi_i^{[k]})} \quad (22)$$

これは、基本対称式の定義式 (19) に ϕ_j を代入したものを連立代数方程式とみて、それに Newton-Raphson 法を適用したものと等価で、2 次の収束をすることが知られている。この反復法は、フィードバック結合をもつ適当なネットワークで実現できる。

3.2 m 次元ベクトル値 h 価関数の場合: テンソル積表現

ベクトル値関数の場合には、各成分について独立にスカラー値の多価標準正則化理論を適用すればよい様に思われるが、これは正しくない。なぜならば、各成分の正則化の結果得られる複数のスカラー値同士を対応付けることができないからである。

この場合には、テンソル積を用いることによって、正しく扱うことができる。 n 次元空間の 1 価の m 次元ベクトル値関数を $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{y} \in R^m, \mathbf{x} \in R^n$) とする。 h 価の場合、それぞれの値に対応する関数を $\mathbf{f}_k(\mathbf{x})$ ($k = 1, 2, \dots, h$) とすると、

$$(\mathbf{y} - \mathbf{f}_1(\mathbf{x})) \otimes (\mathbf{y} - \mathbf{f}_2(\mathbf{x})) \otimes \dots \otimes (\mathbf{y} - \mathbf{f}_h(\mathbf{x})) = 0 \quad (23)$$

が正しい拘束条件になる。前節までで述べてきた場合は、すべてこの方程式の特殊な場合として見る事ができる。この方程式の成分数は m^h 個である。しかし、方程式の順番を入れ替えても式の意味は同じでなければならないので、この表現には冗長性が存在する。そこで、このテンソル積に対称化 [24] の操作を施す。すると、成分方程式の数は、 ${}_m H_h$ 個 (m 個の集合から h 個取り出す重複組合せの数) になる。それでも、依然、本来の自由度である mh よりは大きいのが、その代わり、表現に多義性は存在しない。

3.2.1 $h = 2, m = 2$ の場合の例

例えば、 $h = 2, m = 2$ の場合には、

$$\frac{1}{2} \{(\mathbf{y} - \mathbf{f}_1(\mathbf{x})) \otimes (\mathbf{y} - \mathbf{f}_2(\mathbf{x})) + (\mathbf{y} - \mathbf{f}_2(\mathbf{x})) \otimes (\mathbf{y} - \mathbf{f}_1(\mathbf{x}))\} = \mathbf{0} \quad (24)$$

という拘束になる。これは、2価2次元ベクトル値関数を2個の2次元ベクトル値関数、

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) = (f_{1,1}(\mathbf{x}), f_{1,2}(\mathbf{x}))^T, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) = (f_{2,1}(\mathbf{x}), f_{2,2}(\mathbf{x}))^T \end{aligned} \quad (25)$$

を用いて表現すると次の、3個の方程式に導かれる。

$$\begin{aligned} y_1^2 - (f_{1,1}(\mathbf{x}) + f_{2,1}(\mathbf{x}))y_1 + f_{1,1}(\mathbf{x})f_{2,1}(\mathbf{x}) &= 0, \\ y_2^2 - (f_{1,2}(\mathbf{x}) + f_{2,2}(\mathbf{x}))y_2 + f_{1,2}(\mathbf{x})f_{2,2}(\mathbf{x}) &= 0, \\ 2y_1y_2 - (f_{1,2}(\mathbf{x}) + f_{2,2}(\mathbf{x}))y_1 - (f_{1,1}(\mathbf{x}) + f_{2,1}(\mathbf{x}))y_2 \\ + (f_{1,1}(\mathbf{x})f_{2,2}(\mathbf{x}) + f_{1,2}(\mathbf{x})f_{2,1}(\mathbf{x})) &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

ここで、4個のスカラー値関数 $f_{1,1}(\mathbf{x}), f_{1,2}(\mathbf{x}), f_{2,1}(\mathbf{x}), f_{2,2}(\mathbf{x})$ の代わりに5個のスカラー値関数を次の様に定義する。

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{x}) &= f_{1,1}(\mathbf{x})f_{2,1}(\mathbf{x}) \\ F_2(\mathbf{x}) &= f_{1,2}(\mathbf{x})f_{2,2}(\mathbf{x}) \\ G_1(\mathbf{x}) &= -(f_{1,1}(\mathbf{x}) + f_{2,1}(\mathbf{x})) \\ G_2(\mathbf{x}) &= -(f_{1,2}(\mathbf{x}) + f_{2,2}(\mathbf{x})) \\ H(\mathbf{x}) &= f_{1,1}(\mathbf{x})f_{2,2}(\mathbf{x}) + f_{1,2}(\mathbf{x})f_{2,1}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (27)$$

すると、3個の方程式 (26) は、次の様に関数 (27) に関してすべて線形になる。

$$\begin{aligned} y_1^2 + G_1(\mathbf{x})y_1 + F_1(\mathbf{x}) &= 0 \\ y_2^2 + G_2(\mathbf{x})y_2 + F_2(\mathbf{x}) &= 0 \\ 2y_1y_2 + G_2(\mathbf{x})y_1 + G_1(\mathbf{x})y_2 + H(\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

ここで、関数 $F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), G_1(\mathbf{x}), G_2(\mathbf{x}), H(\mathbf{x})$ を未知関数とみなして正則化理論を用いると、次のエネルギー汎関数の最小化問題に帰着される。

$$\begin{aligned} E^{(2,2)}[F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), G_1(\mathbf{x}), G_2(\mathbf{x}), H(\mathbf{x})] &= \\ \sum_{i=1}^N \left\{ \left(y_{1(i)} \right)^2 + G_1(\mathbf{x}(i))y_{1(i)} + F_1(\mathbf{x}(i)) \right\}^2 &+ \\ + \sum_{i=1}^N \left\{ \left(y_{2(i)} \right)^2 + G_2(\mathbf{x}(i))y_{2(i)} + F_2(\mathbf{x}(i)) \right\}^2 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left\{ 2y_{1(i)}y_{2(i)} + G_2(\mathbf{x}_{(i)})y_{1(i)} + G_1(\mathbf{x}_{(i)})y_{2(i)} + H(\mathbf{x}_{(i)}) \right\}^2 \\
& + \lambda_{F_1} \|S_{F_1} F_1(\mathbf{x})\|^2 + \lambda_{F_2} \|S_{F_2} F_2(\mathbf{x})\|^2 \\
& + \lambda_{G_1} \|S_{G_1} G_1(\mathbf{x})\|^2 + \lambda_{G_2} \|S_{G_2} G_2(\mathbf{x})\|^2 + \lambda_H \|S_H H(\mathbf{x})\|^2
\end{aligned} \quad (29)$$

ここで、 $S_{F_1}, S_{F_2}, S_{G_1}, S_{G_2}, S_H$ は、正則化作用素、 $\lambda_{F_1}, \lambda_{F_2}, \lambda_{G_1}, \lambda_{G_2}, \lambda_H$ は正定数で、それぞれの関数の滑らかさの程度を与える。この汎関数は、未知関数に関して2次であるから、標準正則化理論の枠内で解くことができる。

式(27)の変換の逆変換は、例えば次のようにしておこなうことができる。まず、次の関数を計算する。

$$f_{+,1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left[-G_1(\mathbf{x}) + \sqrt{\{G_1(\mathbf{x})\}^2 - 4F_1(\mathbf{x})} \right] \quad (30)$$

$$f_{-,1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left[-G_1(\mathbf{x}) - \sqrt{\{G_1(\mathbf{x})\}^2 - 4F_1(\mathbf{x})} \right] \quad (31)$$

$$f_{+,2}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left[-G_2(\mathbf{x}) + \sqrt{\{G_2(\mathbf{x})\}^2 - 4F_2(\mathbf{x})} \right] \quad (32)$$

$$f_{-,2}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left[-G_2(\mathbf{x}) - \sqrt{\{G_2(\mathbf{x})\}^2 - 4F_2(\mathbf{x})} \right] \quad (33)$$

ここで、2組の解

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) &= (f_{+,1}(\mathbf{x}), f_{+,2}(\mathbf{x}))^T \\
\mathbf{f}_2(\mathbf{x}) &= (f_{-,1}(\mathbf{x}), f_{-,2}(\mathbf{x}))^T
\end{aligned} \quad (34)$$

および

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) &= (f_{+,1}(\mathbf{x}), f_{-,2}(\mathbf{x}))^T \\
\mathbf{f}_2(\mathbf{x}) &= (f_{-,1}(\mathbf{x}), f_{+,2}(\mathbf{x}))^T
\end{aligned} \quad (35)$$

のうちから、

$$\|H(\mathbf{x}) - f_{1,1}(\mathbf{x})f_{2,2}(\mathbf{x}) - f_{1,2}(\mathbf{x})f_{2,1}(\mathbf{x})\| \quad (36)$$

が小さくなるほうを選ぶ。

4 まとめ

本論文では、従来の標準正則化理論を拡張し多価関数を扱える多価標準正則化理論を提案し、正則化理論の1つの実現方法である、超並列計算あるいはアナログ回路網のデジタルシミュレーションのための緩和アルゴリズムを導出し、シミュレーション実験を行った。

本理論は、従来の様にデータに対するクラスタリングを行うことなく、複数の曲面を直接数学的にテンソル積を用いて表現することが特徴になっている。従って、それに

伴う以下の様な欠点も存在する。(1) 多価度 n をあらかじめ知ることが出来ない場合、可能なすべての場合を試して、もっともよくデータを近似できるものを選択するなどの工夫が必要である。(2) データのクラスタリングを行わない代償として、データのノイズの影響が複数の曲面間で相互作用するので、正確なノイズモデルをたてにくい。(3) エネルギー汎関数が2次形式になるように未知関数の置き換えを行っているので、曲面とデータとの間の距離の定義が複雑になっている。おそらくそのためと考えられるが、シミュレーションにおいても曲面の交差を正しく復元することができない様である。しかし、これは従来のクラスタリングによっても簡単には解決できない問題である。

しかし、例えば、人間の透明視の表面復元モデルへの応用を考えた場合には、これらの欠点は、モデルの検証のための鍵となることも考えられる。

今後は、これらの問題点をさらに検討するとともに、正則化理論のもうひとつの実現方法である、正則化ネットワークの理論 [16] を多価関数に拡張することを試みる予定である。

謝辞

研究を進めるにあたり有益な討論をしていただいた、MIT 人工知能研究所 Tomaso Poggio 教授、Federico Girosi 博士、ATR 人間情報通信研究所 佐藤雅昭博士、安藤広志博士、早川秀樹氏、水谷博之氏に感謝します。また、シミュレーションプログラムを作成して頂いた、株式会社 CSK 宅見正氏に感謝します。最後に、本研究の機会を与えていただいた ATR 人間情報通信研究所 東倉洋一社長、赤松茂室長に感謝します。

参考文献

- [1] Ando H (1993) A computational model for reconstructing multiple surfaces. *Investigative Ophthalmology & Visual Science(Supplement)* 34(4): 1186.
- [2] Blake A, Zisserman A (1987) *Visual Reconstruction*. MIT Press Cambridge MA
- [3] Darrel T, Pentland AP (1991) Robust estimation of multi-layered motion representation. *IEEE Workshop on Visual Motion, Princeton*, pp.173-178
- [4] Geiger D, Girosi F (1991) Parallel and deterministic algorithms from mrfs: surface reconstruction. *IEEE Trans Patt Anal Machine Intell* 13(5):401-412
- [5] Geman S, Geman D (1984) Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restration of images. *IEEE Trans Patt Anal Machine Intell* 6:721-741
- [6] Grimson WEL. (1981) *From Images to Surfaces: A Computational Study of the Human Early Visual System*. MIT Press Cambridge MA
- [7] Harris JG, Koch C, Staats E, Luo J (1990) Analog hardware for detecting discontinuities in early vision. *Int J Comput Vision* 4: 211-223
- [8] Horn BKP, Schunck BG (1981) Determining optical flow. *Artif Intell* 17:185-203
- [9] Kersten D (1991) Transparency and the cooperative computation of scene attributes. In *Computational Models of Visual Processing* (Landy MS and Movshon JA eds) MIT Press Cambridge MA
- [10] Kirkpatrick S, Gelatt CD, Vecchi MP (1983) Optimization by simulated annealing. *Science* 220: 219-227
- [11] Madarasmi S, Kersten D, Pong T-C (1993) The computation of stereo disparity for transparent and for opaque surfaces. In *Advances in Neural Info Proc Syst* 5. Morgan Kaufman Publishers
- [12] Poggio T, Torre V, Koch C (1985) Computational vision and regularization theory. *Nature* 317:314-319
- [13] Poggio T, Koch C (1985) Ill-posed problems in early vision: from computational theory to analogue networks. *Proc R Soc Lond B* 226: 303-323

- [14] Poggio T, Gamble E, Little JJ (1988) Parallel integration of vision modules. Science 242: 436-440
- [15] Poggio T (1990) A theory of how the brain might work. Proc Cold Harbor Symp on Quantitative Biology IV: 899-910
- [16] Poggio T, Girosi F (1990) Networks for approximation and learning. Proc IEEE 78(9): 1481-1497
- [17] Poggio T, Edelman S (1990) A network that learns to recognize 3D Objects. Nature 343: 263-266
- [18] Rosenfeld A, Jasinschi R(Eds.) (1993) Special Issue on Perceptual Transparency. Spatial Vision 7(2)
- [19] 志沢雅彦、間瀬健二 (1993) 多重オブティカルフロー：基本拘束方程式と運動透明視・運動境界検出の統一計算理論、信学論 (D-II) J76-D-II 5:987-1005
- [20] Shizawa M (1993) Direct estimation of multiple disparities for transparent multiple surfaces in binocular stereo. Proc. IEEE 4th Int Conf Comput Vision (ICCV'93) Berlin Germany pp.447-454
- [21] Terzopoulos D (1986) Regularization of inverse visual problems involving discontinuities. IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell 8: 413-424
- [22] Tikhonov AN, Arsenin VY (1977) Solutions of ill-posed problems. W.H.Winston Washington DC
- [23] Wang JYA, Adelson EH (1993) Layered representation for motion analysis. IEEE Conf Comput Vision & Patt Recog, New York, pp.361-366
- [24] 横沼健雄 (1977) テンソル空間と外積代数、岩波講座 基礎数学 3 岩波書店

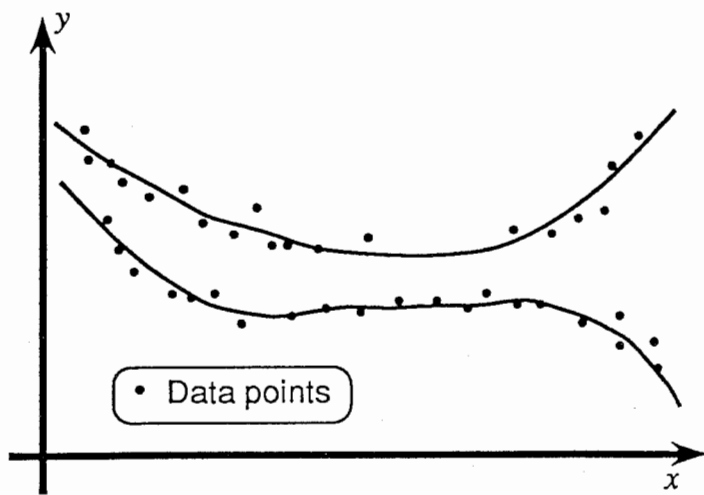


図 1 2重曲面(曲線)によってモデル化されるデータの例
Fig. 1 Example of data set that is characterized by two-fold surfaces
(curves).

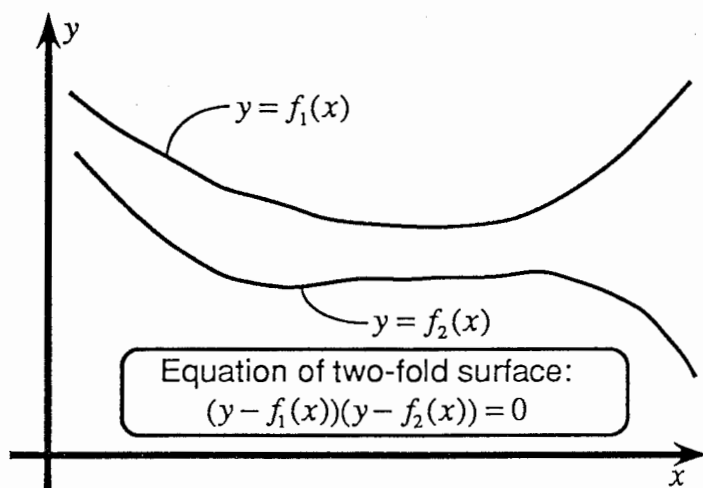


図 2 2重曲面上のデータが満たす拘束方程式
Fig. 2 Constraint equation of two-fold surfaces

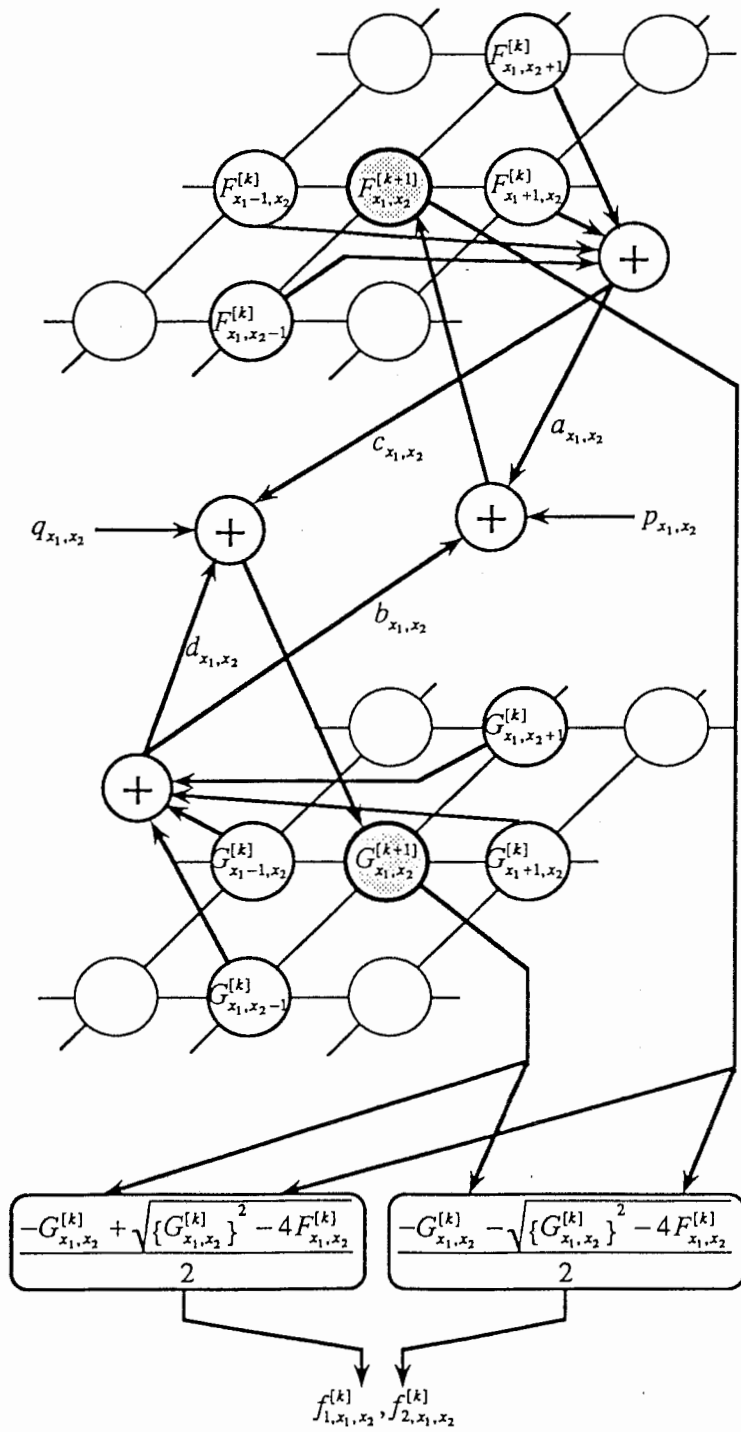
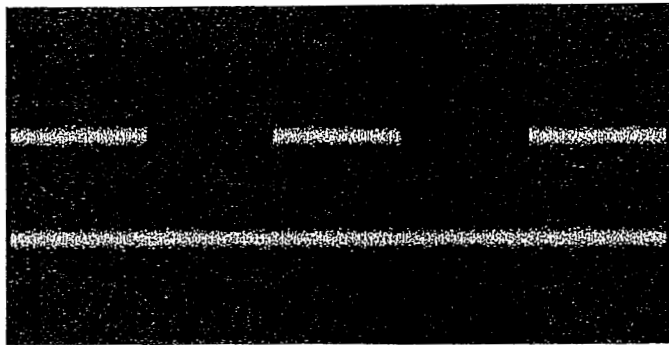
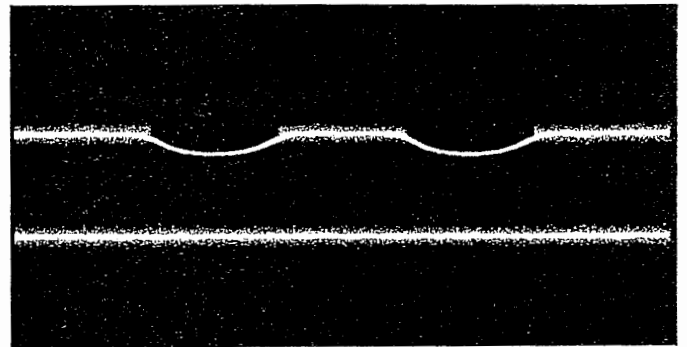


図 3 2重表面復元の緩和計算を行うネットワーク

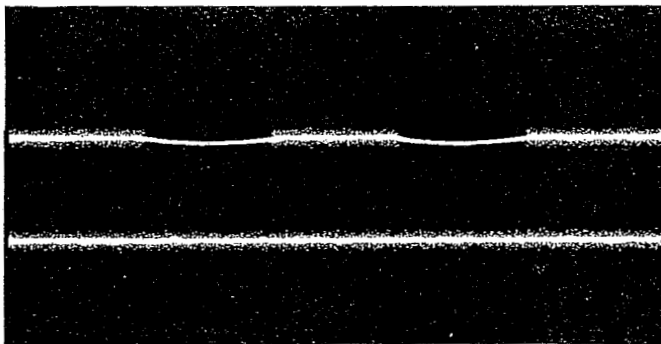
Fig. 3 Network of Gauss-Seidel relaxation method for two-fold-surface reconstruction.



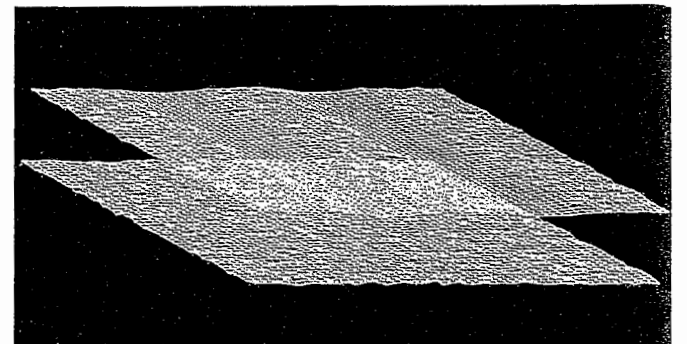
(a) Test Sample data (See text).



(b) Result after 500 iterations (side view).

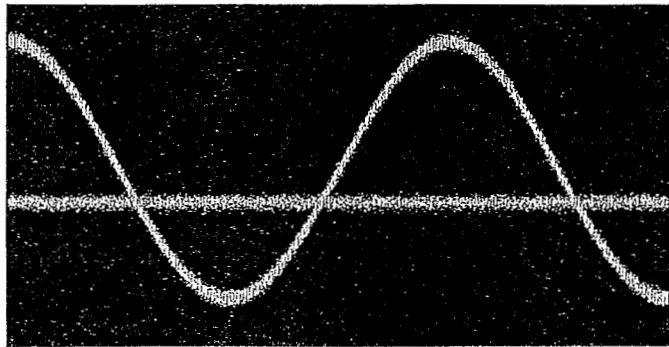


(c) Result after 10000 iterations (side view).

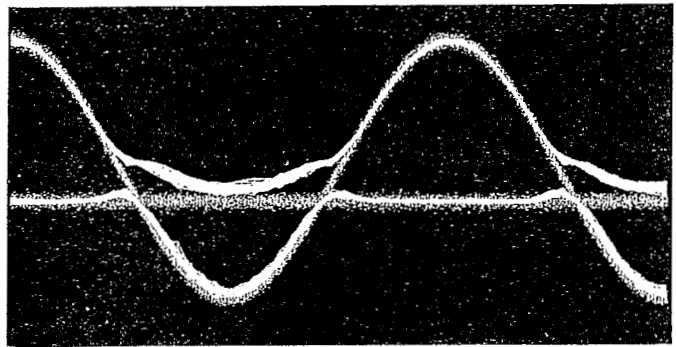


(d) Result after 10000 iterations.

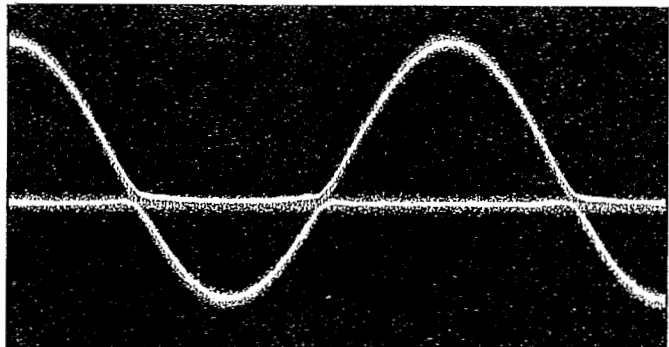
図 4 実験 1 の結果 ($\lambda_F = \lambda_G = 6.0$)
Fig. 4 Results of experiment 1.



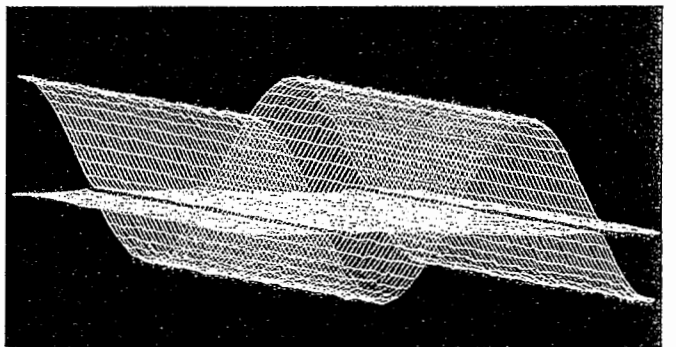
(a) Test Sample data (See text).



(b) Result after 500 iterations (side view).



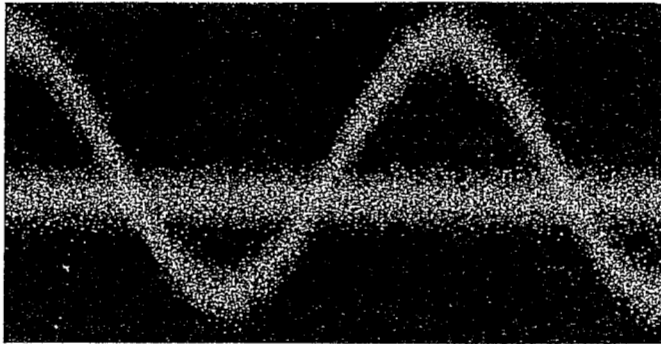
(c) Result after 2000 iterations (side view).



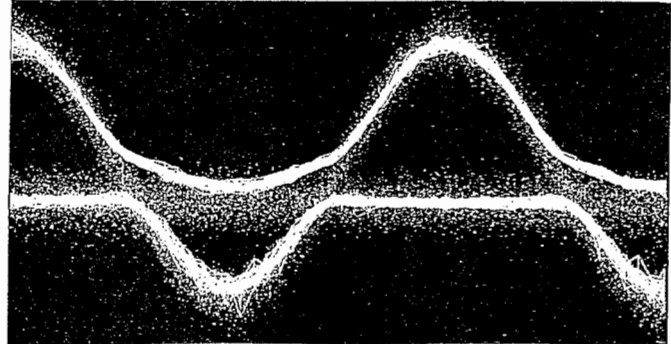
(d) Result after 2000 iterations.

図 5 実験 2 の結果 ($\lambda_F = \lambda_G = 12.0$)

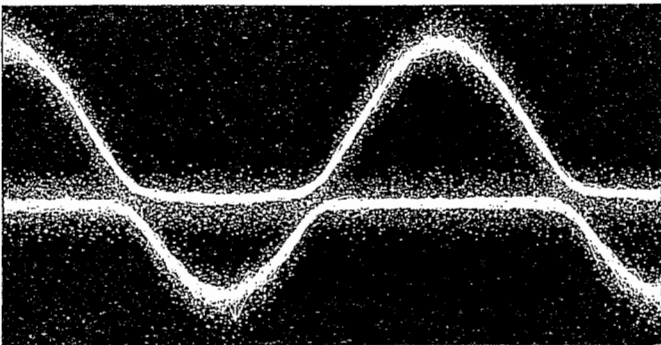
Fig. 5 Results of experiment 2.



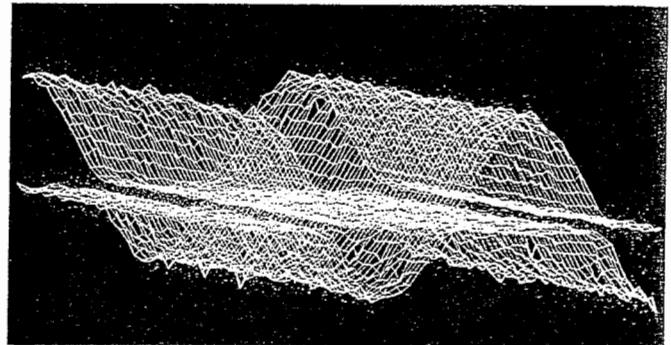
(a) Test Sample data (See text).



(b) Result after 500 iterations (side view).



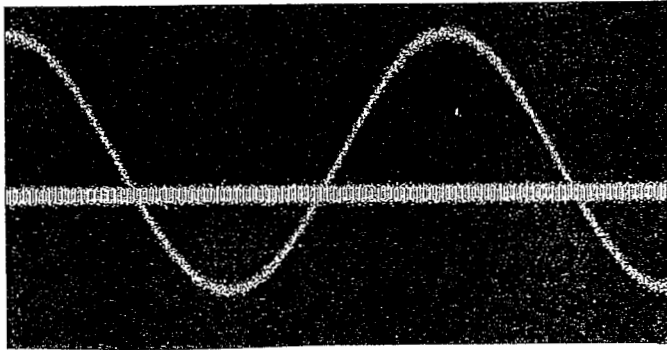
(c) Result after 2000 iterations (side view).



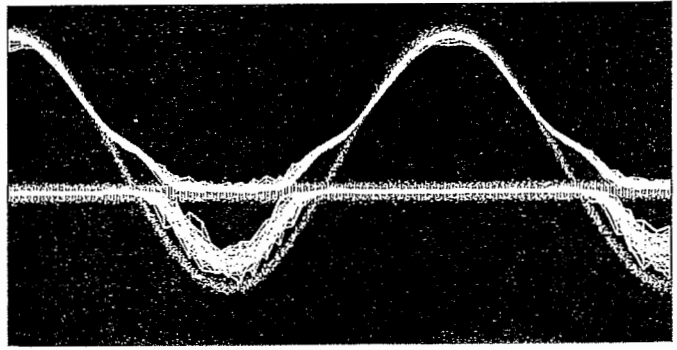
(d) Result after 2000 iterations.

図 6 実験 3 の結果 ($\lambda_F = \lambda_G = 12.0$)

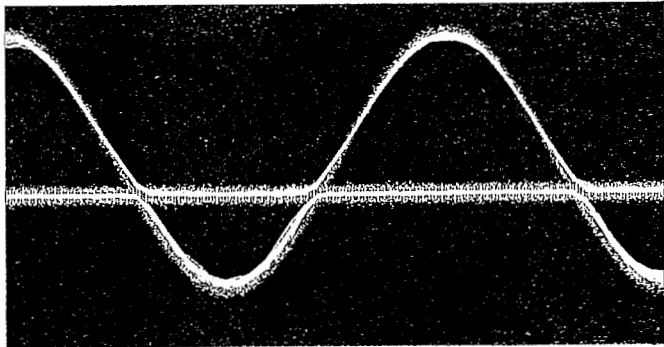
Fig. 6 Results of experiment 3.



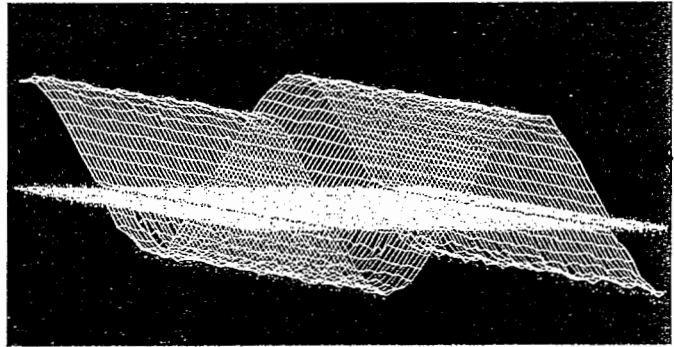
(a) Test Sample data (See text).



(b) Result after 500 iterations (side view).



(c) Result after 2000 iterations (side view).



(d) Result after 2000 iterations.

図 7 実験 4 の結果 ($\lambda_F = \lambda_G = 12.0$)

Fig. 7 Results of experiment 4.