TR－A－0160

特徴点対応に基づいた運動立体視におけるトランスペアレンシー

志沢 雅彦

1993. 1.30

ATR視聴覚機構研究所

〒619-02 京都府相楽郡精華町光台2-2 ☎07749-5-1411

ATR Auditory and Visual Perception Research Laboratories

2-2, Hikaridai, Seika-cho, Soraku-gun, Kyoto 619-02 Japan

Telephone: +81-7749-5-1411
Facsimile: +81-7749-5-1408

© ㈱ATR視聴覚機構研究所

特徴点対応に基づいた
運動立体視におけるトランスペアレンシー[1]

志沢 雅彦
ATR 視聴覚機構研究所

1993 年 1 月 30 日

[1]本研究の機会を与えていただいた ATR 視聴覚機構研究所 淀川英司社長、同認知機構研究室下原勝憲室長に感謝致します。また、研究を進めるに当たり、適切なコメントと情報を頂いた群馬大学の金谷健一教授に感謝致します。なお、本研究は、著者が NTT ヒューマンインタフェース研究所において得た着想をもとに、ATR 通信システム研究所をへて現在に至る過程で完成された理論とアルゴリズムをまとめたものである。両研究所の諸氏に感謝致します。特に、NTT ヒューマンインタフェース研究所在職中にお世話になった間瀬健二主任研究員 (現在、NTT 技術情報センター) に記して感謝致します。

あらまし

互いに重なりあって異なる運動をする２個の剛体の３次元運動パラメータと３次元構造パラメータを、運動や物体表面のなめらかさ、あるいは、近似的投影モデルなどの付加的な前提条件なしに、２フレーム間の特徴点対応情報から閉形式の数値計算と一撃クラスタリングで復元する計算理論とアルゴリズムを提案する。まず、２枚の透視投影像間の特徴点対応に n 個の３次元剛体運動が含まれる場合の基本拘束方程式を、透明視の普遍的計算理論として著者が提案した重ね合わせの原理を用いて導出する。次に、２重運動の場合について、２組の３次元剛体運動パラメータを、データの誤差を考慮して準最適に求める線形アルゴリズムを導出する。このアルゴリズムは、データにノイズが無い場合は、厳密解を与えることはもちろんであるが、計算の閉形式性を保ちつつ、中間段階で得られる拘束方程式をできるだけ多く用いる最適化手法を取り入れているため、誤差が存在する場合にも全体として準最適な解を求めることができる。さらに、この運動パラメータを用いて対応点の各物体へのクラスタリングと構造復元を行う一撃アルゴリズムを導く。特徴点の数が十分多く、それらが特殊な配置に無ければ、一般の運動パラメータに対して解が一意に定まることが構成的に証明される。最後に数値シミュレーションによって本アルゴリズムの正当性を示す。

Abstract

The computatonal theory and an algorithm are presented which can recover 3D motion parameters and 3D structures of multiple rigidly- moving objects from two-frame feature point correspondences without assuming smoothness of motions nor structures, and without approximating geometry of projection onto the image planes. First, the constraint equation for two-fold transparent 3D motion and structure from correspondences in two perspectively projected frames is derived based on the *principle of superposition* which is a universal computational principle for multiple motion and motion transparency. Secondly, a quasi-optimal linear algorithm is derived which estimates two-fold multiple motions and structures from noisy correspondence data. The algorithm exploits intermediate constraints as much as possible while keeping its closed-form nature. The algorithm can then cluster the correspondences into two rigid objects in a single-shot manner as well can estimate depths of the correspondence points as a result. It is proved constructively that the solution is unique if the motion and structure is not in special conditions. Finally, a numerical simulation is presented for verifying the proposed algorithm.

もくじ

1 はじめに **3**

2 複数運動の推定に関する従来の研究 **4**

3 多重３Ｄ運動の基本拘束方程式の導出 **5**

3.1 線形アルゴリズムの発展と現状 5

3.2 特徴点の２透視投影像からの３次元運動および構造復元の計算理論 . . . 5

3.3 基本拘束方程式の演算子形式表現 7

3.4 重ね合わせの原理に基づいた多重３Ｄ運動の基本拘束方程式 9

4 ２重３Ｄ運動の準最適な線形解析解 **11**

4.1 第１段階：基本テンソルの推定 13

4.1.1 相関テンソルの計算 13

4.1.2 固有値方程式の係数行列の作成 13

4.1.3 固有値方程式の数値解の計算 14

4.2 第２段階：基本テンソルの分解 15

4.2.1 部分行列の分解による基本行列の単位行ベクトル、単位列ベクトルの計算 16

4.2.2 係数 ζ_i および η_j の計算と物体対応の決定 17

4.2.3 基本行列の並進ベクトル、回転行列への分解 19

4.3 第３段階：一撃クラスタリングと多義解の除去 19

5 計算機シミュレーションによる検証 **20**

6 まとめ **20**

参考文献 **22**

付録 **26**

付録１ 26

付録２ 26

付録３ 27

1 はじめに

従来の運動立体視の計算理論は、物体が単一の剛体であるという仮定条件のもとで導かれた拘束方程式に基づいて展開されている。従って、視野内に複数の剛体が存在し、それらが互いに異なる３次元運動を行う場合には、弛緩法、線過程と結合されたマルコフ場、ハフ変換などの投票法、拘束方程式に対する適合性に基づいたデータのクラスタリングなどのいろいろなセグメンテーション手法と組み合わせたアルゴリズムが提案されてきた。

人間の運動立体視の能力を見てみると、いろいろ制約はあるものの、比較的容易に、重なりあった複数物体の異なる３次元運動を知覚することが出来る [39]。これは、トランスペアレンシー（透明視）と呼ばれ、運動視、運動立体視のみならず、単眼視、両眼立体視においても重なりあった複数の物体を知覚する能力として、心理物理学の研究対象になってきた。この透明視では、一般に、従来提案されてきている計算理論の前提条件が満たされないため、現在のところ、透明視に関するいろいろな特異な知覚現象の発見や、現象論的な拘束条件の発見にとどまっている。透明視の計算理論が明らかになると、複雑極まる実世界で人間の視覚が難なく機能する秘密の一端が解き明かされることになり、サイエンスとしての視覚研究の基礎理論としての役割を果たすのみならず、柔軟な工学的センサーとしての視覚システムの設計原理を与えるものとなりうる。

一方、工学的な観点からすると、一般に、複数の物体領域に画像を分割するセグメンテーション手法は、その正常な動作範囲や、データの誤差に対する振る舞いなどの性質を正確に把握することが非常に困難であることが問題点として指摘されてきた [15]。これは、繰り返し計算や、投票、クラスターの探索アルゴリズムが、数学的に厳密な解析手段に乗りにくいことがその理由である。もし、複数運動の推定問題が、純粋に数学的な手段のみで定式化できるならば、原理的に上記の問題点は生じず、純粋に数値的な計算プロセスだけでこの問題が解決される可能性が生まれる。

志沢ら [34] は、従来のオプティカルフローの計算理論を拡張し、複数の運動パターンが重なりあって、画像面の各点に複数のフローベクトルが対応する場合に、動画像が満たさなければならない基本拘束方程式を導いた。そして、この基本拘束方程式から導かれたアルゴリズムによって、セグメンテーションを行わずに、直接複数組のフローベクトルを画像面の各点で計算できることを示した。ここで、基本拘束方程式を導く際に用いた数学は、重ね合わせの原理と呼ばれ、純粋に数学的な手法である。この手法は、フローベクトルによってパラメータ付けされた振幅演算子を用いて拘束方程式を表現し、複数組のフローパラメータに対応する振幅演算子の合成演算子を作ることによって全く形式的に、多重フローの基本拘束方程式を導出することができる。この形式的抽象性が意味するところは、いかなる計算理論であっても同様の形式で基本拘束方程式が記述されれば、ある条件のもとで、全く形式的かつ自動的に、複数属性に関する拘束条件、すなわち、透明視の計算理論を導出できるということである。

本論文では、運動立体視において基本的代表的でかつ数学的に厳密な計算理論である、２枚の透視投影像における特徴点の点対応情報からの３次元運動と３次元構造の復元問題を対象に、重ね合わせの原理を適用し、複数の剛体が独立な運動をする場合に理論とアルゴリズムを拡張することを試みる。

以下、まず、第２章において、従来の３Ｄ運動立体視のアルゴリズムにおける複数運動の扱いをサーベイする。次に、第３章において、２枚の透視投影像の特徴点対応からの３次元運動および、３次元構造復元の計算理論をその歴史的発展経緯とともに簡単に述べ、演算子表現と重ね合わせの原理を導入することによって、多重３Ｄ運動の基本拘束方程式を導出する。第４章では、２重３Ｄ運動の場合について、その線形アルゴリズムを述べる。そして、計算された運動パラメータを用いて特徴点データのクラスタリングを一撃的に行うアルゴリズムを提案する。第５章では、数値シミュレーションによって、実際に２組の３Ｄ運動と各物体の３次元構造が求まることを検証する。

2　複数運動の推定に関する従来の研究

従来、複数物体の異なる複数組の３次元運動と３次元構造を復元する方法には、次の様なものがあった。

（１）　３枚の画像の特徴点の直交投影像からの３次元運動復元において、方程式数が運動パラメータの未知数よりも多いことを利用して、余剰な方程式を用いた剛体性の検査によって特徴点のクラスタリングを行う方法 [40]。

（２）　Hough 変換に代表されるパラメータ空間における投票法を用いオプティカルフロー場から異なる３次元運動パラメータを持つ物体に領域分割したもの [9][1]。

（３）　オプティカルフロー場からの３次元復元に関して、物体の境界を表現する線過程を導入したエネルギー関数の画像全体にわたる最適化によって、画像領域の３次元運動によるセグメンテーションと３次元運動パラメータおよび３次元構造の復元を同時に行うもの [25]。

（４）　ステレオ動画像における線特徴の間の剛体拘束を用いて、異なる３次元運動をする複数物体に線特徴をクラスタリングした例 [45]。

（５）　複数枚の画像の直交投影像から、特異値分解によって運動と構造を求める Factorization 法 [37] において、画像行列の階数によって、独立な３次元運動をする物体の数を知ることができる事実と形状のなめらかさ拘束を用いて、クラスタリングを行った例 [3]。

（６）　輝度変化から３次元運動を復元する直接法 [26] において、一つの運動が画像面で大きな部分を占めていることを前提として、拘束方程式の２乗残差をもとに運動領域の分割と運動パラメータの推定を同時に行なったもの [28]。

（７）　直交投影下の動画像における特徴点対応からの３次元運動・構造復元において、剛体運動の基本拘束方程式を満たす特徴点の極大集合を探索によって求めることによっ

て、セグメンテーションを行ったもの [5]。

（8）動画像を3次元時空間画像とみなして、剛体運動の運動モデルを用いた時空領域におけるセグメンテーションを行ったもの [19]。

これらいずれの方法においても、運動推定の基本となる拘束方程式はあくまでも単一運動のものであり、クラスタリング、セグメンテーションとの協調的な計算過程によって、各物体への領域分割と運動推定を同時におこなっている。また、いずれにおいても、透視投影を想定していなかったり、物体表面や運動のなめらかさを仮定しているなど、物体の画像面上における表れ方に強い制約がおかれている。これらは、そもそも、一般に、セグメンテーションの問題自体が明確に定義しにくい不良設定問題であることに起因していた (cf.[15]).

3　多重3D運動の基本拘束方程式の導出

3.1　線形アルゴリズムの発展と現状

点対応からの3次元運動点構造復元は、はじめに、Longuet-Higgins が、ベクトル代数を用いて、8点からの線形解析解を導出した (8点アルゴリズム) [22]。それとは独立に、Tsai と Huang は特異値分解を使った解を示した [38]。Zhuang et.al. は、これらの結果を統合し、8点アルゴリズムを基本行列をもとにした形式に統一した [46]。Weng et.al. は、8点以上の対応点が与えられた時に、最小2乗法によって最適解を求める方法を提案した [43]。金谷は、特徴点座標を正規化された同次座標表現である N ベクトルを用いて表現し、これらの解に対して統一した形式で記述している [16] [17]。

本論文では、単一運動の場合に金谷の定式化を踏襲し、さらに、振幅演算子表現に発展させ、重ね合わせの原理を適用することによって、多重運動の場合の計算理論と計算アルゴリズムを展開する。ただし、金谷では、カメラが運動し、物体は静止していると仮定しているが、本論文では、カメラが静止し、物体が運動すると仮定する。

3.2　特徴点の2透視投影像からの3次元運動および構造復元の計算理論

本節では、単一運動の場合の定式化と、その線形アルゴリズムを本論文の展開に必要な範囲で簡潔に結果のみを述べる。アルゴリズムの導出などの詳細は、例えば、金谷 [16] [17],Weng et.al.[43] などを参照されたい。

図1は、単一物体の剛体運動と点対応が与えられた時の投影の幾何学的関係を示す。世界座標の原点をピンホールカメラの穴の位置にとる。物体が剛体運動をした前後の 2 枚の透視投影像間で物体上の N 個の特徴点 $P_\alpha(\alpha = 1,2,\cdots,N)$ と $P'_\alpha(\alpha = 1,2,\cdots,N)$ の対応が与えられているとする。一番目の画像（第1画像）を基準とし、その特徴点の画像面上の座標を (x_α, y_α) とする。これらに対応する2番目の画像（第2画像）における座標を (x'_α, y'_α) とする。まず、$\mathbf{m}_\alpha = (m_{\alpha(1)}, m_{\alpha(2)i}, m_{\alpha(3)}) = \frac{1}{\sqrt{x_\alpha^2+y_\alpha^2+f^2}}(x_\alpha, y_\alpha, f)^T$,

$\mathbf{m}'_\alpha = (m'_{\alpha(1)}, m'_{\alpha(2)}, m'_{\alpha(3)}) = \frac{1}{\sqrt{(x'_\alpha)^2+(y'_\alpha)^2+f^2}}(x'_\alpha, y'_\alpha, f)^T$, という、大きさを 1 に正規化された同次 3 次元ベクトルで対応点データを表現する。これは、原点を中心とする単位球面に特徴点を投影することに相当する。ここで、$f(>0)$ はカメラ系の焦点距離 (ピンホールの穴から投影面までの距離) である。同次ベクトル $\mathbf{m}_\alpha$ および $\mathbf{m}'_\alpha$ による特徴点の表現は符号の不定性が存在するが、以下では同一視して考える。

第 1 画像、第 2 画像におけるカメラのレンズ中心 O から、点 P_α, P'_α までの距離をそれぞれ、$r_\alpha(>0)$, $r'_\alpha(>0)$ とする。すると、座標系 $\{O;(X,Y,Z)\}$ に対する P_α, P'_α の座標は、それぞれ、$r_\alpha\mathbf{m}_\alpha$, $r'_\alpha\mathbf{m}'_\alpha$ である。

このとき、3 次元空間における物体の剛体運動の方程式は次式となる。

$$r'_\alpha\mathbf{m}'_\alpha = r_\alpha\mathbf{R}\mathbf{m}_\alpha + \mathbf{h}, \tag{1}$$

ここで、$\mathbf{R} = (R_{ij})$ は 3 次元回転行列 (従って、$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$, $\det\mathbf{R} = 1$)、$\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)^T$ は、並進ベクトルである。(金谷 [16][17] は、カメラが運動するとして定式化しているのに対して、式 (1) では、物体が運動するとしているので本論文とは $\{r_\alpha, \mathbf{m}_\alpha\}$ と $\{r'_\alpha, \mathbf{m}'_\alpha\}$ がすべて逆になっていることに注意されたい。) 原理的に、並進ベクトル $\mathbf{h}$ と構造パラメータ r_α および r'_α にはスケール倍の不定性があるので、以下では、$\|\mathbf{h}\| = \sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2} = 1$ と仮定する。回転行列 $\mathbf{R}$ は、回転軸を表す単位軸ベクトル $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3)$ と回転角 Ω (単位軸ベクトルの向きに対して右ねじの方向を正にとる) を用いて次の形に書くことができる (ロドリゲスの公式)。

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\Omega + l_1^2(1-\cos\Omega) & l_1l_2(1-\cos\Omega) - l_3\sin\Omega & l_1l_3(1-\cos\Omega) + l_3\sin\Omega \\ l_2l_1(1-\cos\Omega) + l_3\sin\Omega & \cos\Omega + l_2^2(1-\cos\Omega) & l_2l_3(1-\cos\Omega) - l_1\sin\Omega \\ l_3l_1(1-\cos\Omega) - l_2\sin\Omega & l_3l_2(1-\cos\Omega) + l_1\sin\Omega & \cos\Omega + l_3^2(1-\cos\Omega) \end{bmatrix} \tag{2}$$

ここで、剛体運動は、まず、回転運動 $\mathbf{R}$ が行われ、次に、並進運動 $\mathbf{h}$ が行われると考える。方程式 (1) は、3 個の 3 次元非零ベクトル $\mathbf{m}'_\alpha$, $\mathbf{R}\mathbf{m}_\alpha$, $\mathbf{h}$ が、線形従属の関係にあることを表現しており、逆に、これら 3 個のベクトルが線形従属であれば適当な r_α, r'_α(ただし、正とは限らないことに注意。) が存在して式 (1) の形に書くことができる (線形従属の定義)。

一般に、3 次元空間の 3 本の位置ベクトルが同一平面上にあるための必要十分条件、すなわち、この 3 本のベクトルが線形従属になる必要十分条件は、それらのスカラー三重積が零になることであるから次式が成立する。

$$|\mathbf{m}'_\alpha \quad \mathbf{h} \quad \mathbf{R}\mathbf{m}_\alpha| = (\mathbf{m}'_\alpha, (\mathbf{h}\times\mathbf{R})\mathbf{m}_\alpha) = 0 \tag{3}$$

ここで、$\mathbf{h}\times\mathbf{R}$ は $\mathbf{h}$ と $\mathbf{R}$ の 3 個の列ベクトル $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ との外積から作られる 3 次行列 $[\mathbf{h}\times\mathbf{r}_1, \mathbf{h}\times\mathbf{r}_2, \mathbf{h}\times\mathbf{r}_3]$ をあらわす。$\mathbf{G} = \mathbf{h}\times\mathbf{R}$ は基本行列 (essential matrix) と呼ばれ、物体の運動情報をすべて含んだ行列である。$\mathbf{G}$ は反対称行列 $\mathbf{H}$ と回転行列 $\mathbf{R}$

の積として

$$\mathbf{G} = \mathbf{H}\mathbf{R} \tag{4}$$

と書くことができる。ここで、

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -h_3 & h_2 \\ h_3 & 0 & -h_1 \\ -h_2 & h_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

である。結果として、特徴点データ $\mathbf{m}_\alpha$, $\mathbf{m}'_\alpha$ に関する拘束である次式を得る。

$$(\mathbf{m}'_\alpha, \mathbf{G}\mathbf{m}_\alpha) = \sum_{i,j=1}^{3} m'_{\alpha(i)} m_{\alpha(j)} G_{ij} = 0, \tag{6}$$

これが、点対応からの３Ｄ運動復元の基本拘束方程式である (運動立体視のエピポーラ拘束とも呼ばれる)。$\mathbf{G}$ には定数倍の不定性が残るが、$\|\mathbf{h}\| = 1$, $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ より $\|\mathbf{G}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} G_{ij}^2} = \sqrt{2}$ となることが示せるので, $\mathbf{G}$ は、大きさ $\sqrt{2}$ のベクトルとみなすことができる。ただし、任意の $\|\mathbf{G}\| = \sqrt{2}$ なる行列 $\mathbf{G}$ が式 (4) の形に分解できるわけではなく、付加条件が必要である。この条件は次式で表される [8][13]($\mathbf{G}$ の固有値が 1,1,0 であるという条件もこれと同値である)。

$$\det(\mathbf{G}) = 0, \quad \|\mathbf{G}\mathbf{G}^T\| = \sqrt{2} \tag{7}$$

分解のための手法のサーベイについては、金谷 [16][17] に詳しいので省略し、分解の曖昧さについてだけ述べる。拘束方程式 (6) からは一般に $\mathbf{G}$ と $-\mathbf{G}$ の２通りの解が得られる。さらに、$\mathbf{G}$ を分解するときに、次式の多義性が存在する (twisted-pair と呼ばれる [24])。

$$\mathbf{G} = \mathbf{h} \times \mathbf{R} = (-\mathbf{h}) \times (\mathbf{I}_\mathbf{h}\mathbf{R}), \tag{8}$$

$\mathbf{I}_\mathbf{h} \equiv 2\mathbf{h}\mathbf{h}^T - \mathbf{I}$ は $\mathbf{h}$ を方向ベクトルとする軸の周りの π だけの回転を表す。従って、拘束方程式 (6) からだけでは剛体運動パラメータに対して４重の多義性が残ることになる。この多義性は剛体運動の方程式 (1) において、$r_\alpha > 0$, $r'_\alpha > 0$ という制約を用いると一つに絞ることができる。運動パラメータが $\{\mathbf{h}, \mathbf{R}\}$ であるとき、物体構造を表すパラメータ r_α, および r'_α は、次の公式から計算することができる。

$$\begin{aligned} r_\alpha(\mathbf{h}, \mathbf{R}) &= \frac{-(\mathbf{h}, \mathbf{m}_\alpha) + (\mathbf{m}'_\alpha, \mathbf{R}\mathbf{m}_\alpha)(\mathbf{h}, \mathbf{R}\mathbf{m}'_\alpha)}{1 - (\mathbf{m}'_\alpha, \mathbf{R}\mathbf{m}_\alpha)^2} \\ r'_\alpha(\mathbf{h}, \mathbf{R}) &= \frac{(\mathbf{h}, \mathbf{m}'_\alpha) - (\mathbf{m}'_\alpha, \mathbf{R}\mathbf{m}_\alpha)(\mathbf{h}, \mathbf{R}\mathbf{m}_\alpha)}{1 - (\mathbf{m}'_\alpha, \mathbf{R}\mathbf{m}_\alpha)^2} \end{aligned} \tag{9}$$

3.3 基本拘束方程式の演算子形式表現

本節では、データ関数と振幅演算子によって拘束方程式 (6) を表現することを考える。まず、データ関数を定義する。この場合データは、ベクトル $\mathbf{m}_\alpha$, $\mathbf{m}'_\alpha$ の積空間に

おける確率振幅分布として次の様に表現できる。

$$f(\xi',\xi)=\sum_{\alpha=1}^{N}\{\prod_{i=1}^{3}\mu(m'_{\alpha(i)}-\xi'_i)\prod_{j=1}^{3}\mu(m_{\alpha(j)}-\xi_j)\}, \tag{10}$$

ここで、$\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3),\xi'=(\xi'_1,\xi'_2,\xi'_3)$ であり、$\mu()$ は、通常のデルタ関数 $\delta()$ の平方根を表す。平方根をとるのは2乗エネルギーが意味を持つようにするためである。したがって、$\mu()$ は次の性質を持つ関数として定義される。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\{\mu(\xi)\}^2d\xi=1, \tag{11}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\{\mu(x-\xi)f(\xi)\}^2d\xi=\{f(x)\}^2. \tag{12}$$

より具体的には、$\mu()$ は、平均 0 の正規分布関数の平方根を、分散 $\sigma\to 0$ なる極限をとったものと解釈することができる：

$$\mu(x)=\lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\sigma}}\exp(-\frac{1}{4\sigma^2}x^2). \tag{13}$$

実際のデータに対しては、データの統計的信頼性に応じて重みをつけることが必要になる。また、一般に、画像と特徴検出器の空間解像度は有限であるため、位置の不確定性が存在する。式 (10) において、各 α に対するデルタ関数をそれぞれ異なる一般の確率振幅分布に一般化すれば特徴点の信頼性と不確定性の両方を直接表現することが可能である。本論文では、計算原理の確認という目的から、信頼性は一様で、空間解像度は無限であると仮定し、この統計的側面についてはこれ以上触れない。

こうして定義されたデータ関数に対して次の振幅演算子を定義する。

$$a(\mathbf{G})=G_{ij}\xi'_i\xi_j. \tag{14}$$

この演算子は、基本行列 G によってパラメータ付けされた線形演算子である。この拘束方程式はパラメータ G に関して同次になっているが、これは、もともと G が定数倍を除いてしか定まらないことを反映している。

以上の定義を用いると基本拘束方程式は次の形に書かれる。

$$a(\mathbf{G})f(\xi',\xi)=0. \tag{15}$$

この方程式はかなり抽象的な表現であるが、以下に示す様に、基本拘束方程式 (6) に等価である。

まず、この振幅演算子に対応するエネルギー密度演算子を $H(\mathbf{G})\cdot=\{a(\mathbf{G})\cdot\}^2$ と定義する。するとエネルギー積分は次式となる。

$$E(\mathbf{G})=\frac{\iint H(\mathbf{G})f(\xi',\xi)d\xi'd\xi}{\|\mathbf{G}\|^2\iint|f(\xi',\xi)|^2d\xi'd\xi} \tag{16}$$

ここで、特に断らない限り、積分は、積分変数の全空間にわたってとることを意味するものとする。定義 (10) と関数 $\mu()$ の性質 (11), (12) を用いると次式となる。

$$E(\mathbf{G})=\frac{\sum_{\alpha=1}^{N}(\sum_{i,j=1}^{3}G_{ij}m'_{\alpha(i)}m_{\alpha(j)})^2}{\|\mathbf{G}\|^2N}=\frac{\sum_{\alpha=1}^{N}(\mathbf{m}'_\alpha,\mathbf{G}\mathbf{m}_\alpha)^2}{\|\mathbf{G}\|^2N} \tag{17}$$

これは、基本拘束方程式 (6) の 2 乗誤差の総和を $\mathbf{G}$ のノルムと対応点の個数 N で割ったものの 1/2 であり、この $E(\mathbf{G})$ の最小化問題において誤差 0 の場合には、(6) と等価になる。

3.4 重ね合わせの原理に基づいた多重３Ｄ運動の基本拘束方程式

本節では、前節の定義と重ね合わせの原理に基づき、多重運動の基本拘束方程式を導出する。まず、2 重運動の場合について基本拘束方程式を導き、n- 重運動の場合については、結果のみを示す。

2 個の剛体に A, B というラベルをつけておく。まず、データ関数に関して考察する。剛体 A の N^A 個の対応点を $\mathbf{m}^A_\beta$、$\mathbf{m}'^A_\beta$ $(\beta=1,2,\cdots,N^A)$ とし、剛体 B の N^B 個の対応点を $\mathbf{m}^B_\gamma$、$\mathbf{m}'^B_\gamma$ $(\gamma=1,2,\cdots,N^B)$ とする。剛体 A, B に対応するデータ関数をそれぞれ $f^A(\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\xi})$ および $f^B(\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\xi})$ とすると、定義 (10) より、

$$\begin{aligned} f^A(\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{\beta=1}^{N^A}\{\prod_{i=1}^{3}\mu(m'^A_{\beta(i)}-\xi'_i)\prod_{j=1}^{3}\mu(m^A_{\beta(j)}-\xi_j)\}, \\ f^B(\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{\gamma=1}^{N^B}\{\prod_{i=1}^{3}\mu(m'^B_{\gamma(i)}-\xi'_i)\prod_{j=1}^{3}\mu(m^B_{\gamma(j)}-\xi_j)\}, \end{aligned} \tag{18}$$

となる。各データ関数は、次の様に拘束されていると仮定する。

$$a(\mathbf{G}^A)f^A(\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\xi})=0,\quad a(\mathbf{G}^B)f^B(\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\xi})=0. \tag{19}$$

両方の物体の対応点集合を合成した対応点集合を $\mathbf{m}_\alpha$, $\mathbf{m}'_\alpha$ $(\alpha=1,2,\cdots,N,N=N^A+N^B)$ とする。このとき、明らかにデータ関数に関して次の加法的重ね合わせが成立する。

$$f(\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\xi})=f^A(\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\xi})+f^B(\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\xi}) \tag{20}$$

従って、重ね合わせの原理から、$f(\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\xi})$ に関する拘束方程式は次式となる[1]。

$$a(\mathbf{G}^A)a(\mathbf{G}^B)f(\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\xi})=0 \tag{21}$$

ここで、$\mathbf{G}^A$ および、$\mathbf{G}^B$ は、それぞれ物体 A および、物体 B の運動パラメータから定まる基本行列を表す。[2]ここで、明らかに左辺の演算子の積は可換なので、誤差が

[1]証明は、多重オプティカルフローの場合 [34] と全く同様であるので省略する。

[2]n 重運動の場合も同様にして n 個の振幅演算子の積として、$\overbrace{a(\mathbf{G}^A)a(\mathbf{G}^B)a(\mathbf{G}^C)\cdots}^{n} f(\xi',\xi)=0$ という拘束になる。

無ければこの方程式は厳密に成立する。合成された振幅演算子を

$$a^{(2)}(\mathbf{G}^A,\mathbf{G}^B)=a(\mathbf{G}^A)a(\mathbf{G}^B)=G^A_{ij}\xi'_i\xi_j G^B_{kl}\xi'_k\xi_l=G^A_{ij}G^B_{kl}\xi'_i\xi_j\xi'_k\xi_l. \tag{22}$$

とし、これに対応するエネルギー密度演算子を $H^{(2)}(\mathbf{G}^A,\mathbf{G}^B)*=\left\{a(\mathbf{G}^A)a(\mathbf{G}^B)*\right\}^2$ によって定義すると、エネルギー積分は次式になる。

$$E^{(2)}(\mathbf{G}^A,\mathbf{G}^B)=\frac{\iint H^{(2)}(\mathbf{G}^A,\mathbf{G}^B)f(\xi',\xi)d\xi'd\xi}{\|\mathbf{G}^A\|^2\|\mathbf{G}^B\|^2\iint|f(\xi',\xi)|^2d\xi'd\xi} \tag{23}$$

これは、定義 (10), (11), (12) を用いると次式に等しいことを示すことができる。

$$\begin{aligned}&E^{(2)}(\mathbf{G}^A,\mathbf{G}^B)\\ =&\frac{\sum_{\alpha=1}^{N}(\sum_{i,j,k,l=1}^{3}G^A_{ij}m'_{\alpha(i)}m_{\alpha(j)}G^B_{kl}m'_{\alpha(k)}m_{\alpha(l)})^2}{\|\mathbf{G}^A\|^2\|\mathbf{G}^B\|^2N}\\ =&\frac{\sum_{\alpha=1}^{N}\{(\mathbf{m}'_\alpha,\mathbf{G}^A\mathbf{m}_\alpha)(\mathbf{m}'_\alpha,\mathbf{G}^B\mathbf{m}_\alpha)\}^2}{\|\mathbf{G}^A\|^2\|\mathbf{G}^B\|^2N}.\end{aligned} \tag{24}$$

このエネルギー積分は、各剛体 A および B に関する運動の拘束条件 $(\mathbf{m}'_\alpha,\mathbf{G}^A\mathbf{m}_\alpha)=0$, および、$(\mathbf{m}'_\alpha,\mathbf{G}^B\mathbf{m}_\alpha)=0$ の積をとった方程式

$$\begin{aligned}&(\mathbf{m}'_\alpha,\mathbf{G}^A\mathbf{m}_\alpha)(\mathbf{m}'_\alpha,\mathbf{G}^B\mathbf{m}_\alpha)\\ =&\sum_{i,j,k,l=1}^{3}m'_{\alpha(i)}m_{\alpha(j)}G^A_{ij}m'_{\alpha(k)}m_{\alpha(l)}G^B_{kl}=0,\end{aligned} \tag{25}$$

の左辺の 2 乗誤差を対応点の数 N で割ったものの 1/4 に他ならない。この拘束方程式の意味は、各対応点対 $\{\mathbf{m}_\alpha,\mathbf{m}'_\alpha\}$ が $(\mathbf{m}'_\alpha,\mathbf{G}^A\mathbf{m}_\alpha)=0$、および、$(\mathbf{m}'_\alpha,\mathbf{G}^B\mathbf{m}_\alpha)=0$ のいずれかをみたすことを表している。

ここで、2 重運動の振幅演算子 (22) について考察する。この演算子は、パラメータ $\mathbf{G}^A$、$\mathbf{G}^B$ に関しては線形でないため、直接これらのパラメータを推定するのは困難である。そこで、この演算子を次の様に線形パラメータであるテンソル $\mathbf{G}^{AB}=G^{AB}_{ijkl}$ を用いて表す。

$$a^{(2)}(\mathbf{G}^{AB})=G^{AB}_{ijkl}\xi'_i\xi_j\xi'_k\xi_l. \tag{26}$$

ここで、テンソル $\mathbf{G}^{AB}$ は、添字 i,j,k,l のそれぞれが、1,2,3 のいずれかをとるので、合計して $3^4=81$ 個の成分を持つ。演算子にもともと存在する定数倍の不定性を考慮すると、80 個の未知パラメータの推定問題になる。しかし、ここで注意しなければならないのは、演算子の対称性から生じる各成分に関する方程式の従属性である。演算子の変数部分 $\xi'_i\xi_j\xi'_k\xi_l$ に注目すると、添字 i と添字 k の交換を行なっても全く変化しない。同様に、添字 j と l の交換を行なっても変化しない。これは、これらの添字の交換によって生じる変化はデータだけからは原理的に区別できないことを示している。従って、これら交換可能な添字に関しての対称化によって、従属性を消去した演算子を

パラメータ推定に用いることが必要である。そこで、対称化振幅演算子を次式で定義する。

$$\hat{a}^{(2)}(\hat{\mathrm{G}}^{AB}) = \hat{G}^{AB}_{\substack{(ik)\\(jl)}}\xi'_{(i}\xi_{(j}\xi'_{k)}\xi_{l)} = \frac{1}{4}\left(G^{AB}_{ijkl}\xi'_i\xi_j\xi'_k\xi_l + G^{AB}_{kjil}\xi'_k\xi_j\xi'_i\xi_l + G^{AB}_{ilkj}\xi'_i\xi_l\xi'_k\xi_j + G^{AB}_{klij}\xi'_k\xi_l\xi'_i\xi_j\right) \tag{27}$$

ここで、添字における丸括弧は、テンソル解析における対応する添字の間の対称性を表す記号である [14]。テンソル $\hat{\mathrm{G}}^{AB}$ と基本行列 G^A および G^B の間には、次のテンソル方程式が成立する。

$$\hat{G}^{AB}_{\substack{(ik)\\(jl)}} = \frac{1}{4}(G^A_{ij}G^B_{kl} + G^A_{kj}G^B_{il} + G^A_{il}G^B_{kj} + G^A_{kl}G^B_{ij}). \tag{28}$$

テンソル $\hat{\mathrm{G}}^{AB}$ (以下基本テンソルと呼ぶ) は、独立な成分数は $({}_3H_2)^2 = 36$ 個であり、定数倍の不定性を考慮すると 35 次元の未知パラメータをもつ。任意のテンソル $\hat{\mathrm{G}}^{AB}$ が式 (28) を満たす本来のパラメータである G^A, G^B に分解できるわけではなく、付加的条件が必要である。この条件は次式で表される[3]。

$$\hat{G}^{AB}_{\substack{(ik)\\(jl)}}\hat{G}^{AB}_{\substack{(i'k')\\(j'l')}} = \hat{G}^{AB}_{\substack{(i'k)\\(j'l)}}\hat{G}^{AB}_{\substack{(ik')\\(jl')}} \tag{29}$$

この条件は、36 次元空間における 2 次方程式群の拘束になっている。添字 $i,j,k,l,$ i',j',k',l' のすべての値に対して、拘束方程式 (29) が意味があるわけではなく、例えば、$(i,j) = (i',j')$ あるいは、$(k,l) = (k',l')$ の場合は、恒等式となり、拘束としての意味はない。また、方程式の対称性から、互いに同値になる方程式も存在する。これらを考慮して、テンソル方程式 (29) における独立な成分方程式の数は、19 になる。この方程式群によって二つの行列 G^A と G^B に分解可能な基本テンソル $\hat{\mathrm{G}}^{AB}$ は完全に規定される。

4　2重3D運動の準最適な線形解析解

方程式群 (29) の条件を満たすような解を直接求めることができれば、原理的には、各剛体に対する最小 8 点づつの対応から $\hat{\mathrm{G}}^{AB}$ が決定できる。しかし、これは、その非線形性から極めて困難である。本節では、拘束式 (29) を無視し、基本テンソル $\hat{\mathrm{G}}^{AB}$ が、その 36 個の成分を $\|\hat{\mathrm{G}}^{AB}\| = \sqrt{\sum_{i,j,k,l=1}^{3}\left(\hat{G}^{AB}_{\substack{(ik)\\(jl)}}\right)^2} = 2$ と規格化された 36 次元の任意のベクトル値を取りうるものとして推定し、得られた基本テンソルを出来る限り最適に 2 個の基本行列 G^A と G^B のテンソル積に分解するアルゴリズムを提案する。この場合、対応点は最低 35 組必要になる。さらにこのうち、最低 8 組づつが物体 A と B

[3] これは、多重射影空間の代数多様体による特徴づけ [41] を、多重パラメータ空間に適用したものである。

に存在しなければならない。すなわち、$N^A \geq 8, N^B \geq 8$ および $N = N^A + N^B \geq 35$ が必要である。このとき、エネルギー積分 (24) において、基本行列のテンソル積を基本テンソル $\hat{\mathrm{G}}^{AB}$ によって置き換えた次のエネルギー関数の最小化問題を解けばよいことになる。

$$E^{(2)}(\hat{\mathrm{G}}^{AB}) = \frac{\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\sum_{i,j,k,l=1}^{3} \hat{G}^{AB}_{\substack{(ik)\\(jl)}} m'_{\alpha(i)} m_{\alpha(j)} m'_{\alpha(k)} m_{\alpha(l)}\right)^2}{\|\hat{\mathrm{G}}^{AB}\|^2 N} \tag{30}$$

この最小化問題にもとづいた線形アルゴリズムは全体で 3 段階からなる。概略を以下に述べる。

（1）対称化された基本テンソル $\hat{\mathrm{G}}^{AB}$ の成分である 36 個の線形未知パラメータに関して過剰拘束の同次線形方程式系を解く。まず、$\mathbf{m}_\alpha$ と $\mathbf{m}'_\alpha$ の相関テンソルを計算し、次に、その成分を係数行列とする 36 次元固有値問題を解き、その最小固有値に対応する固有ベクトルとして $\hat{\mathrm{G}}^{AB}$ の最適推定値を得る。このとき、$\hat{\mathrm{G}}^{AB}$ には、符号に関する 2 重多義性が残る。

（2）推定された基本テンソル $\hat{\mathrm{G}}^{AB}$ を 2 個の基本行列 G^A と G^B に分解する。$\hat{\mathrm{G}}^{AB}$ の成分のすべてではないが、36 個の 3/4 に相当する 27 個の成分を用い、複数の固有値問題による最適化手法の組合せによって、誤差によって互いに矛盾する方程式を平均的に満たすような基本行列の推定値 $\bar{\mathrm{G}}^A$ と $\bar{\mathrm{G}}^B$ を求める準最適手法を提案する。この方法によって、対応点データが特殊な配置でなければ、基本行列への分解は完全に行われる。得られる 1 組の解を $\{\bar{\mathrm{G}}^A, \bar{\mathrm{G}}^B\}$ とすると、それぞれの基本行列の符号を替えた $\{-\bar{\mathrm{G}}^A, \bar{\mathrm{G}}^B\}$, $\{\bar{\mathrm{G}}^A, -\bar{\mathrm{G}}^B\}$, $\{-\bar{\mathrm{G}}^A, -\bar{\mathrm{G}}^B\}$ も解となる。さらに、これらの基本行列を並進・回転運動に分解するときに、式 (8) に示された 2 重の多義性が存在する。従って、並進運動、回転運動パラメータに関しては、各物体に対して、4 重の多義性が存在し、全体としては、$4 \times 4 = 16$ 通りの解が存在する。これらの多義解は、次に示すように、最終的には一意に絞られるものであり、原問題がもつ本質的な多義性ではない。以上のパラメータ計算においては、物体に関するセグメンテーションやクラスタリングは一切行っていないことに注意しよう。したがって、この段階では、どの対応点が、どの運動パラメータによって運動したのかは決定されていない。

（3）物体構造パラメータ r'_α, r_α の計算とともに、対応点データのクラスタリングを行い、運動パラメータの多義性を除去し、一意解を抽出する。 物体構造を表現する奥行きパラメータ r'_α, r_α の計算は、対応点のクラスタリング処理と統合されなければならない。なぜならば、奥行きパラメータの計算には、もともとの剛体運動の方程式 (1) を用いなければならないからである。クラスタリングは、剛体運動方程式の 2 乗誤差関数を用いて行う。各対応点対 $\{\mathbf{m}_\alpha, \mathbf{m}'_\alpha\}$ に対して、2 乗誤差を計算する。この 2 乗誤差によって対応点対 $\{\mathbf{m}_\alpha, \mathbf{m}'_\alpha\}$ が A, B どちらの物体に属するかを決定できる。すなわち、より小さい 2 乗誤差を与える運動パラメータに対応する物体を選択すればよい。このとき、単一運動に関する運動パラメータの 4 重多義解のいずれも同じ 2 乗誤差

を与えるので、クラスタリングに関しては、この4組の運動パラメータのうちのどれか一つについて検査すればよい。クラスタリングが終了したら、公式 (9) を用いて、r_α, r'_α の正値性を検査することによって、各物体の運動パラメータを一義的に決定する。

以下では、これら各段階のアルゴリズムの詳細を述べる。

4.1 第1段階：基本テンソルの推定

第1段階は、2重運動の基本テンソル $\bar{\mathrm{G}}^{AB}$ の 36 個の成分を決定することである。なお、導出は付録1を参照せよ。

4.1.1 相関テンソルの計算

対応点対データ $\{\mathbf{m}_\alpha, \mathbf{m}'_\alpha\}(\alpha = 1, 2, \cdots, N)$ に対して次式で定義される4次の相関テンソルを計算する。

$$C_{ijkli'j'k'l'} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} m'_{\alpha(i)}m_{\alpha(j)}m'_{\alpha(k)}m_{\alpha(l)}m'_{\alpha(i')}m_{\alpha(j')}m'_{\alpha(k')}m_{\alpha(l')} \tag{31}$$

各添字 $i, j, k, l, i', j', k', l'$ は、それぞれが $1, 2, 3$ という値をとるので、このままだと、$3^8 = 6561$ 個という膨大な計算をしなければならないように見える。しかし、このテンソルの添字 $i, j, k, l, i', j', k', l'$ には、i, k, i', k' の間の交換と j, l, j', l' の間の交換に関する対称性があり、したがって、$C_{\substack{(iki'k')\\(jlj'l')}}$ と書ける。この対称性を考慮すると、実際に計算しなければならない独立な成分は $({}_3H_4)^2 = 225$ 個である。

4.1.2 固有値方程式の係数行列の作成

固有値方程式は次の形の 36 次元一般化固有値問題になる。

$$\mathbf{Mg} = \lambda\mathbf{Dg} \tag{32}$$

ここで、$\mathbf{g}$ は $\hat{\mathrm{G}}^{AB}$ の成分からなる 36 次元ベクトルであり、$\mathbf{M}$ は、36×36 の正定値対称行列で、その成分は相関テンソル $C_{\substack{(iki'k')\\(jlj'l')}}$ の成分の定数倍である。$\mathbf{D}$ は、36×36 の正定値対称行列であり、その成分は、ベクトル $\mathbf{g}$ のノルム、すなわち、$\hat{\mathrm{G}}^{AB}$ のノルムによって決まる定数からなる。ここでは、基本テンソルのノルムをユークリッドノルムと仮定した場合のノルム行列を導出した。λ は固有値であり、最小固有値に対応する固有ベクトルが最適化問題 (30) の最適推定値である。まず、ベクトル $\mathbf{g}$ を $\hat{\mathrm{G}}^{AB}$ の成分によって定義する。$\mathbf{g}$ は、4 個の 9 次元列ベクトル $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$, $\mathbf{g}_4$ を $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1^T, \mathbf{g}_2^T, \mathbf{g}_3^T, \mathbf{g}_4^T)^T$ と結合したものである。ここで、

$$\mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} \hat{G}^{AB}_{\substack{(ii)\\(jj)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^A_{ij}G^B_{ij} \end{pmatrix}$$

$$(i=1,2,3,j=1,2,3)$$

$$\mathbf{g}_2 = \left(\hat{G}^{AB}_{\substack{(ii)\\(jl)}}\right) = \left(\frac{G^A_{ij}G^B_{il}+G^A_{il}G^B_{ij}}{2}\right)$$

$$(i=1,2,3,(j,l)=(1,2),(2,3),(3,1))$$

$$\mathbf{g}_3 = \left(\hat{G}^{AB}_{\substack{(ik)\\(jj)}}\right) = \left(\frac{G^A_{ij}G^B_{kj}+G^A_{kj}G^B_{ij}}{2}\right)$$

$$(j=1,2,3,(i,k)=(1,2),(2,3),(3,1))$$

$$\mathbf{g}_4 = \left(\hat{G}^{AB}_{\substack{(ik)\\(jl)}}\right)$$

$$= \left(\frac{G^A_{ij}G^B_{kl}+G^A_{kj}G^B_{il}+G^A_{il}G^B_{kj}+G^A_{kl}G^B_{ij}}{4}\right)$$

$$((i,k),(j,l)=(1,2),(2,3),(3,1)). \tag{33}$$

である。行列 $\mathbf{M}$ は、次の形に分割して定義する。

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & 2\mathbf{M}_{12} & 2\mathbf{M}_{13} & 4\mathbf{M}_{14} \\ 2\mathbf{M}_{21} & 4\mathbf{M}_{22} & 4\mathbf{M}_{23} & 8\mathbf{M}_{24} \\ 2\mathbf{M}_{31} & 4\mathbf{M}_{32} & 4\mathbf{M}_{33} & 8\mathbf{M}_{34} \\ 4\mathbf{M}_{41} & 8\mathbf{M}_{42} & 8\mathbf{M}_{43} & 16\mathbf{M}_{44} \end{bmatrix} \tag{34}$$

ここで、各部分行列 $\mathbf{M}_{pq}$ は 9×9 で $\mathbf{M}_{pq} = \mathbf{M}^T_{qp}$ が成り立つ。これらの部分行列は相関テンソル $C_{\substack{(iki'k')\\(jlj'l')}}$ の成分からなる。例えば、

$$\mathbf{M}_{12} = \left(C_{\substack{(iii'i')\\(jjj'l')}}\right) \tag{35}$$

ここで、$i,j=1,2,3$ は、行列の行をインデックス付けし、$i'=1,2,3$, $(j',l')=(1,2),(2,3),(3,1)$ は、列をインデックス付けする。成分の順序は、それぞれ対応する $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ の順序に対応するものとする。

定数行列 $\mathbf{D}$ は次の様に書かれる。

$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}[\mathbf{D}_1,\mathbf{D}_2,\mathbf{D}_3,\mathbf{D}_4] \tag{36}$$

ここで、$\mathbf{D}_1,\mathbf{D}_2,\mathbf{D}_3$, $\mathbf{D}_4$ は 9×9 行列で、$\mathbf{I}_9$ を 9 次の単位行列としたとき、$\mathbf{D}_1 = \mathbf{I}_9, \mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_3 = 2\mathbf{I}_9, \mathbf{D}_4 = 4\mathbf{I}_9$ と定義される。

4.1.3 固有値方程式の数値解の計算

式 (32) の固有値方程式を数値計算で解く。$\mathbf{W} = \sqrt{\mathbf{D}} = \mathrm{diag}[\mathbf{I},\sqrt{2}\mathbf{I},\sqrt{2}\mathbf{I},2\mathbf{I}]$ とし ($\mathbf{D}$ が一般の正定値対称行列の場合には、$\mathbf{D} = \mathbf{W}^T\mathbf{W}$ を満たす上三角行列 $\mathbf{W}$ をとる)、$\mathbf{g}' = \mathbf{W}\mathbf{g}$, $\mathbf{M}' = (\mathbf{W}^T)^{-1}\mathbf{M}\mathbf{W}^{-1}$ とおくと、固有値方程式は次の標準的な形に変換される。

$$\mathbf{M}'\mathbf{g}' = \lambda\mathbf{g}' \tag{37}$$

以下では、ベクトル $\mathbf{g}_i$ の推定値を $\bar{\mathbf{g}}_i(i=1,\cdots,4)$ とし、それに対応する基本テンソルを $\bar{\hat{\mathbf{G}}}^{AB}=\bar{\hat{G}}^{AB}_{\binom{ik}{jl}}$ と記すことにする。推定された基本テンソルは

$$\left\|\bar{\hat{\mathbf{G}}}^{AB}\right\|=\sqrt{\sum_{i,j,k,l=1}^{3}\left(\bar{\hat{G}}^{AB}_{\binom{ik}{jl}}\right)^2}=2 \tag{38}$$

と規格化されていると仮定する。

4.2 第2段階：基本テンソルの分解

テンソル方程式 (28) を解いて、基本テンソルの推定値 $\bar{\hat{\mathbf{G}}}^{AB}$ から基本行列 $\mathbf{G}^A$ と $\mathbf{G}^B$ を求める。この拘束方程式は、全部で 36 個の方程式をもつ同次連立代数方程式系になっている。基本テンソルの規格化条件を考慮するとパラメータ $\hat{\mathbf{G}}^{AB}$ の自由度は $36-1=35$ 次元である。一方、2個の基本行列の未知数は $9+9=18$ 個だが、それぞれの規格化条件を考慮すると自由度は $18-2=16$ 次元となる。したがって、連立代数方程式系 (28) は、$35-16=19$ 個の拘束が過剰な方程式系となり、一般に、データにノイズが含まれる場合には解が存在しない。したがって、なんらかの最適化手法によって、これらの方程式をできるだけよく満たす解を求めることが必要になる。なお、この余分な 19 次元の自由度は、拘束式 (29) を無視した結果あらわれたものである。式 (28) の2乗誤差を次の様に定義する。

$$e(\mathbf{G}^A,\mathbf{G}^B)=\sum_{i,j,k,l=1}^{3}\left[\bar{\hat{G}}^{AB}_{\binom{ik}{jl}}-\frac{1}{4}\left(G^A_{ij}G^B_{kl}+G^A_{kj}G^B_{il}+G^A_{il}G^B_{kj}+G^A_{kl}G^B_{ij}\right)\right]^2. \tag{39}$$

この誤差関数を最小化する基本行列 $\mathbf{G}^A$ $\mathbf{G}^B$ を直接求めることができれば、基本テンソルの最適分解が可能になる。現在のところ、このエネルギー関数の最小化によって、テンソル方程式 (28) のすべての成分方程式を同時に最小2乗法の意味で最適に満たす解を求める解析的方法は見い出していない。しかし、式 (33) で定義した基本テンソルの成分からなるベクトルのうち、$\mathbf{g}_4$ を除く、$\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,\mathbf{g}_3$ に含まれる 27 個の成分に関する方程式を平均的に満たす解を複数の固有値問題の組合せによって準最適に求める方法を以下に示す様に見い出した。実際、誤差を考慮しなければ $\mathbf{g}_4$ の成分は基本行列の分解に関しては全く冗長な成分であることが明らかになる。

まず、任意の基本行列 $\mathbf{G}$ が、単位行ベクトル $\mathbf{b}_i^T=[b_{i1},b_{i2},b_{i3}]$ $(\|\mathbf{b}_i\|=\sqrt{b_{i1}^2+b_{i2}^2+b_{i3}^2}=1;i=1,2,3)$, 単位列ベクトル $\mathbf{c}_j=[c_{1j},c_{2j},c_{3j}]^T$ $(\|\mathbf{c}_j\|=\sqrt{c_{1j}^2+c_{2j}^2+c_{3j}^2}=1;j=1,2,3)$、およびそれらの係数 ζ_i, η_j によって次のように2通りに表せることを指摘しておく。

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}\zeta_1\mathbf{b}_1^T\\ \zeta_2\mathbf{b}_2^T\\ \zeta_3\mathbf{b}_3^T\end{bmatrix}=[\eta_1\mathbf{c}_1,\eta_2\mathbf{c}_2,\eta_3\mathbf{c}_3] \tag{40}$$

ここで、$\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)^T$ および $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T$ とすると、$\|\mathbf{G}\| = \sqrt{2}$ から、$\|\zeta\| = \sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2} = \sqrt{2}$ および、$\|\eta\| = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2} = \sqrt{2}$ なる拘束がある。$\mathbf{G}^A$, $\mathbf{G}^B$ に対応して、$(\mathbf{b}_i^A)^T$, $\mathbf{c}_j^B$, ζ_i^A, η_j^B などの記法を用いる。

4.2.1 部分行列の分解による基本行列の単位行ベクトル、単位列ベクトルの計算

基本テンソル $\hat{G}^{AB}_{\substack{(ik)\\(jl)}}$ の部分テンソルである $\hat{G}^{AB}_{\substack{(ii)\\(jl)}}$ ($i = k$ を満たす成分) と単位行ベクトルの間には次の関係がある。

$$\bar{G}^{AB}_{\substack{(ii)\\(jl)}} = \frac{1}{2}\left(G^A_{ij}G^B_{il} + G^A_{il}G^B_{ij}\right) = \frac{1}{2}\left\{\left(\zeta_i^A b_{ij}^A\right)\left(\zeta_i^B b_{il}^B\right) + \left(\zeta_i^B b_{ij}^B\right)\left(\zeta_i^A b_{il}^A\right)\right\} \tag{41}$$

この部分テンソルは、ベクトル $\mathbf{g}_1$ および $\mathbf{g}_2$ の推定値だけから構成できる。この関係に基づいて、$\mathbf{b}_i^A$ および $\mathbf{b}_i^B$ を求めるための以下の計算アルゴリズムが得られる。

$i = 1, 2, 3$ のそれぞれの場合について、添字 j を行、添字 l を列とする 3×3 対称行列 $\mathbf{S}_i$ を

$$\mathbf{S}_i = \begin{bmatrix} \bar{G}^{AB}_{\substack{(ii)\\(11)}} & \bar{G}^{AB}_{\substack{(ii)\\(12)}} & \bar{G}^{AB}_{\substack{(ii)\\(13)}} \\ \bar{G}^{AB}_{\substack{(ii)\\(21)}} & \bar{G}^{AB}_{\substack{(ii)\\(22)}} & \bar{G}^{AB}_{\substack{(ii)\\(23)}} \\ \bar{G}^{AB}_{\substack{(ii)\\(31)}} & \bar{G}^{AB}_{\substack{(ii)\\(32)}} & \bar{G}^{AB}_{\substack{(ii)\\(33)}} \end{bmatrix} \tag{42}$$

と定義すると対称行列となる。その固有値展開を

$$\mathbf{S}_i = \sigma_{i+}\mathbf{s}_{i+}\mathbf{s}_{i+}^T + \sigma_{i0}\mathbf{s}_{i0}\mathbf{s}_{i0}^T + \sigma_{i-}\mathbf{s}_{i-}\mathbf{s}_{i-}^T \tag{43}$$

とする。ここで、固有値はすべて実数で、$\sigma_{i+} \geq \sigma_{i0} \geq \sigma_{i-}$ とする。このとき、誤差のない理想的な場合には、$\sigma_{i+} > 0$, $\sigma_{i0} = 0$ および $\sigma_{i-} < 0$ となるが、誤差があっても、次の公式によって $\mathbf{b}_i^A$ および $\mathbf{b}_i^B$ の最適な推定値が得られる[4]。

$$\bar{\mathbf{b}}_i^A, \bar{\mathbf{b}}_i^B = \pm\sqrt{\frac{\sigma_{i0} - \sigma_{i-}}{\sigma_{i+} - \sigma_{i-}}}\mathbf{s}_{i+} + \sqrt{\frac{\sigma_{i+} - \sigma_{i0}}{\sigma_{i+} - \sigma_{i-}}}\mathbf{s}_{i-} \tag{44}$$

ここで、注意すべきは、符号の不定性が残るということと、右辺の 2 つの解を $\bar{\mathbf{b}}_i^A$ と $\bar{\mathbf{b}}_i^B$ のどちらに割り振らなければならないかは、この段階では決定されないことである。

単位列ベクトルも同様の計算で推定することができる。この場合は、基本テンソル $\bar{G}^{AB}_{\substack{(ik)\\(jl)}}$ の部分テンソルである $\bar{G}^{AB}_{\substack{(ik)\\(jj)}}$ ($j = l$ を満たす成分) と単位列ベクトルの間の次の関係を用いる。

$$\hat{G}^{AB}_{\substack{(ik)\\(jj)}} = \frac{1}{2}\left(G^A_{ij}G^B_{kj} + G^A_{kj}G^B_{ij}\right) = \frac{1}{2}\left\{\left(\eta_j^A c_{ji}^A\right)\left(\eta_j^B c_{jk}^B\right) + \left(\eta_j^B c_{ji}^B\right)\left(\eta_j^A c_{jk}^A\right)\right\} \tag{45}$$

この部分テンソルは、ベクトル $\mathbf{g}_1$ および $\mathbf{g}_3$ の推定値だけから構成できる。

---

[4] ここで、$\mathbf{S}_i \neq \mathbf{0}$ $(i = 1, 2, 3)$ が必要である。$\mathbf{S}_i = \mathbf{0}$ の場合は、このアルゴリズムは破綻するが、あらかじめ座標系を原点の周りに適当な角度だけ回転すればこれを避けることができる。

$j=1,2,3$ のそれぞれの場合について、添字 i を行、添字 k を列とする 3×3 行列 $\mathbf{T}_j$ を

$$\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} \bar{G}^{AB}_{\substack{(11)\\(jj)}} & \bar{G}^{AB}_{\substack{(12)\\(jj)}} & \bar{G}^{AB}_{\substack{(13)\\(jj)}} \\ \bar{G}^{AB}_{\substack{(21)\\(jj)}} & \bar{G}^{AB}_{\substack{(22)\\(jj)}} & \bar{G}^{AB}_{\substack{(23)\\(jj)}} \\ \bar{G}^{AB}_{\substack{(31)\\(jj)}} & \bar{G}^{AB}_{\substack{(32)\\(jj)}} & \bar{G}^{AB}_{\substack{(33)\\(jj)}} \end{bmatrix} \tag{46}$$

と定義すると対称行列となる。その固有値分解を

$$\mathbf{T}_j = \tau_{j+}\mathbf{t}_{j+}\mathbf{t}_{j+}^T + \tau_{j0}\mathbf{t}_{j0}\mathbf{t}_{j0}^T + \tau_{j-}\mathbf{t}_{j-}\mathbf{t}_{j-}^T \tag{47}$$

とする。次の公式によって $\mathbf{c}_j^A$ および $\mathbf{c}_j^B$ の最適な推定値が得られる (ただし、$\mathbf{T}_j \neq \mathbf{0} (j=1,2,3)$ が必要)。

$$\bar{\mathbf{c}}_j^A, \bar{\mathbf{c}}_j^B = \pm\sqrt{\frac{\tau_{j0}-\tau_{j-}}{\tau_{j+}-\tau_{j-}}}\mathbf{t}_{j+} + \sqrt{\frac{\tau_{j+}-\tau_{j0}}{\tau_{j+}-\tau_{j-}}}\mathbf{t}_{j-} \tag{48}$$

ここで、単位行ベクトルの場合と同様に、符号の不定性が残り、右辺の 2 つの解を $\bar{\mathbf{c}}_j^A$ と $\bar{\mathbf{c}}_j^B$ のどちらに割り振らなければならないかは、この段階では決定されない。

単位行ベクトル、単位列ベクトルの符号の不定性に関しては、係数、ζ_i, η_j に吸収させることができるため、以後、考慮する必要はない。なお、本節のアルゴリズムの導出は付録 2 に述べた。

4.2.2 係数 ζ_i および η_j の計算と物体対応の決定

こうして計算された $\bar{\mathbf{b}}_i^A$, $\bar{\mathbf{b}}_i^B$, $\bar{\mathbf{c}}_j^A$ および $\bar{\mathbf{c}}_j^B$ の候補から式 (40) の関係を用いて、$\boldsymbol{\zeta}$ および $\boldsymbol{\eta}$ を求めることを考える。ただし、これら候補の間で、物体 A または B への帰属は決定されていないので、これもこの段階で解決する。

そのために、2 乗誤差関数

$$\begin{aligned} e(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta}) &= \left\| \begin{bmatrix} \zeta_1\bar{\mathbf{b}}_1^T \\ \zeta_2\bar{\mathbf{b}}_2^T \\ \zeta_3\bar{\mathbf{b}}_3^T \end{bmatrix} - [\eta_1\bar{\mathbf{c}}_1, \eta_2\bar{\mathbf{c}}_2, \eta_3\bar{\mathbf{c}}_3] \right\|^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{3}(\zeta_i\bar{b}_{ij} - \eta_j\bar{c}_{ji})^2 \end{aligned} \tag{49}$$

を最小化することを考える。この式は、パラメータ ζ_i, η_j に関して 2 次形式である。これを活かした簡潔なアルゴリズムを導くため、本来の規格化条件 $\|\boldsymbol{\zeta}\| = \|\boldsymbol{\eta}\| = \sqrt{2}$ でなく、これら 2 個のベクトルを合成した 6 次元ベクトル $\boldsymbol{\nu} = (\boldsymbol{\zeta}^T, -\boldsymbol{\eta}^T)^T = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, -\eta_1, -\eta_2, -\eta_3)^T$ に関する 1 個の規格化条件 $\|\boldsymbol{\nu}\| = \sqrt{\|\boldsymbol{\zeta}\|^2 + \|\boldsymbol{\eta}\|^2} = 2$ で近似する。これは、もとの拘束条件からみると必要条件であるが、この条件で求められたベクトルの要素から $\boldsymbol{\zeta}$ と $\boldsymbol{\eta}$ を再規格化して求めるのは容易である。もとのデータに誤差が無ければ正しい値が得られるはずである。

条件 $\|\boldsymbol{\nu}\| = 2$ のもとで、式(49) を最小化する問題は、次の 6 次元固有値問題に帰着される。

$$\mathbf{U}\boldsymbol{\nu} = \rho\boldsymbol{\nu} \tag{50}$$

ρ は固有値で、最小固有値の 4 倍が 2 乗誤差であり、最小固有値に対応する固有ベクトルが $\boldsymbol{\nu}$ の最適推定値である。ここで、行列 $\mathbf{U}$ は、次式で定義される実対称行列である。

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{V} \\ \mathbf{V}^T & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \tag{51}$$

$\mathbf{I}_3$ は 3 次の単位行列で、$\mathbf{V}$ は、

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \bar{b}_{11}\bar{c}_{11} & \bar{b}_{12}\bar{c}_{12} & \bar{b}_{13}\bar{c}_{13} \\ \bar{b}_{21}\bar{c}_{21} & \bar{b}_{22}\bar{c}_{22} & \bar{b}_{23}\bar{c}_{23} \\ \bar{b}_{31}\bar{c}_{31} & \bar{b}_{32}\bar{c}_{32} & \bar{b}_{33}\bar{c}_{33} \end{bmatrix} \tag{52}$$

で定義される。固有値問題 (50) を用いて物体への帰属の決定とパラメータ ζ_i, η_j の推定を次のようにして、同時に行うことができる。$\bar{\mathbf{b}}_1, \bar{\mathbf{b}}_2, \bar{\mathbf{b}}_3, \bar{\mathbf{c}}_1, \bar{\mathbf{c}}_2, \bar{\mathbf{c}}_3$ のそれぞれに関して、物体への帰属に 2 通りの多義性があるので、全部で、$2^6 = 64$ 通りの組合せを検査しなければならない。このうちで、2 通りのみが正しい組合せであり、この 2 通りの正解は、物体のラベルを入れ換えたものに相当するはずである。誤差を考慮した検査を行うために、次の手順を実行する。

（1） 64 通りの候補に関して行列 $\mathbf{U}$ を作り、固有値問題 (50) を解き、それぞれの候補に対する最小固有値とそれに対応する固有ベクトルを計算する。

（2） （1） で求めた最小固有値を比較し、小さい方から 2 つを選び出す。そして、この 2 つの場合が、物体のラベルを入れ換えた場合に相当することを検査する。

（3） （2） で選び出した場合の固有ベクトル $\bar{\boldsymbol{\nu}}$ から $\boldsymbol{\zeta}$ および $\boldsymbol{\eta}$ の成分を取り出し、$\|\bar{\boldsymbol{\zeta}}\| = \sqrt{2}, \|\bar{\boldsymbol{\eta}}\| = \sqrt{2}$ となるように再規格化された推定値 $\bar{\boldsymbol{\zeta}}, \bar{\boldsymbol{\eta}}$ を計算する。

最後の （3） の規格化では符号に関して 2 通りの任意性が存在するが、これは、基本行列の符号の任意性によるもので、後で考慮されるため、ここではどちらか一方を求めればよい (ただし、$\bar{\boldsymbol{\zeta}}$ と $\bar{\boldsymbol{\eta}}$ の間で符号が矛盾してはならない)。

以上で、$\bar{\mathbf{b}}_i^X, \bar{\zeta}_i^X (i = 1,2,3; X = A, B)$ および、$\bar{\mathbf{c}}_j^X, \bar{\eta}_j^X (j = 1,2,3; X = A, B)$ が求まったので、式 (40) に基づき $\mathbf{G}^X$ の推定値 $\bar{\mathbf{G}}^X$ を計算する (以下、X は、A および B を意味するものとする)。このとき、なるべく多くの情報を用いた方がロバストであるから、行ベクトルに基づいた基本行列の推定値と列ベクトルに基づいた基本行列の推定値の平均をとった後、再規格化する。

本節のアルゴリズムの導出は、付録 3 に述べた。

4.2.3 基本行列の並進ベクトル、回転行列への分解

基本行列 $\bar{\mathbf{G}}^X$ の分解は、従来の単一運動に関する方法がほぼそのまま利用できる。並進ベクトルは、$\bar{\mathbf{G}}^X(\bar{\mathbf{G}}^X)^T$ の最小固有値に対する単位固有ベクトル $\bar{\mathbf{h}}^X$ として求められる。

ここで、単一運動の場合には、拘束条件 $|\mathbf{h} \quad \mathbf{m}'_\alpha \quad \mathbf{G}\mathbf{m}_\alpha| \geq 0$ を用いて並進ベクトルの符号まで決定できる [16][17] が、多重運動の場合には、各対応点対 $\{\mathbf{m}_\alpha, \mathbf{m}'_\alpha\}$ がどちらの物体に属するかが決定されていないため、この拘束条件を用いることはできない。この拘束条件は、もともと $r_\alpha > 0$ および $r'_\alpha > 0$ から帰結される条件なので、後の第3段階の点対応対のクラスタリング後に、直接この拘束条件を用いることによってこの符号は決定することにする。

回転行列は、極分解 [12]、四元数 [11]、特異値分解 [2] などの方法によって計算できる。例えば、四元数による方法では、行列 $\bar{\mathbf{K}}^X = \bar{\mathbf{G}}^X \times \bar{\mathbf{h}}^X$ の成分から作られる4次行列の最大固有値に対応する単位固有ベクトルから回転行列の推定値 $\bar{\mathbf{R}}^X$ が閉形式で求められる。

$\bar{\mathbf{G}}^X$ の分解に際して、並進ベクトルの符号の不定性から式 (8) で説明した2重の多義性が存在する。さらに、$\bar{\mathbf{G}}^X$ 自身に、符号の不定性があるので、物体 A および B のそれぞれに4通りの多義性が残っている。したがって、この段階では、全体で $4^2 = 16$ 通りの多義性が残っていることになる。物体 X の運動パラメータ候補のうち一つを $\mathcal{M}^X_{++} = \left\{\bar{\mathbf{h}}^X, \bar{\mathbf{R}}^X\right\}$ とし、他の3個の運動パラメータ候補を、$\mathcal{M}^X_{+-} = \left\{\bar{\mathbf{h}}^X, \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{h}}^X}\bar{\mathbf{R}}^X\right\}$, $\mathcal{M}^X_{-+} = \left\{-\bar{\mathbf{h}}^X, \bar{\mathbf{R}}^X\right\}$, および $\mathcal{M}^X_{--} = \left\{-\bar{\mathbf{h}}^X, \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{h}}^X}\bar{\mathbf{R}}^X\right\}$ とする。

4.3 第3段階：一撃クラスタリングと多義解の除去

運動パラメータが有限個の候補に絞られたので、剛体運動の方程式である式 (1) とそれから導かれた公式 (9) に基づいて物体構造パラメータ r'_α, および r_α を計算し、特徴点データのクラスタリングを行うとともに、制約条件 $r_\alpha > 0$ および $r'_\alpha > 0$ を用いて解を一意に決定する。クラスタリングは、式 (1) の2乗誤差

$$\mathcal{E}(\mathbf{h}, \mathbf{R}, r'_\alpha, r_\alpha, \mathbf{m}'_\alpha, \mathbf{m}_\alpha) = \left\| r'_\alpha \mathbf{m}'_\alpha - r_\alpha \mathbf{R}\mathbf{m}_\alpha - \mathbf{h} \right\|^2 \qquad (53)$$

を用いて行う。

まず、公式 (9) にもとづいて運動パラメータが $\mathcal{M}^X_{++}$ の場合の物体構造パラメータを $\alpha = 1, \cdots, N$ にわたって計算し、それらを $\bar{r}'^X_\alpha(\mathcal{M}^X_{++})$、$\bar{r}^X_\alpha(\mathcal{M}^X_{++})$ とする。

次に、このときの2乗誤差を式 (53) を用いて計算する。それを $\bar{\mathcal{E}}^X_\alpha = \mathcal{E}(\mathcal{M}^X_{++}, \bar{r}'^X_\alpha(\mathcal{M}^X_{++}), \bar{r}^X_\alpha(\mathcal{M}^X_{++}), \mathbf{m}'_\alpha, \mathbf{m}_\alpha)$ とおく。次の集合を計算する。

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^A &= \left\{\alpha | \alpha = 1, \cdots, N, \bar{\mathcal{E}}^A_\alpha \leq \bar{\mathcal{E}}^B_\alpha\right\} \\ \mathcal{I}^B &= \left\{\alpha | \alpha = 1, \cdots, N, \bar{\mathcal{E}}^A_\alpha \geq \bar{\mathcal{E}}^B_\alpha\right\}. \end{aligned} \qquad (54)$$

すると、$\mathcal{I}^X$ は、物体 X 上の点であると推定された特徴点対応のインデクス集合を表す。ここでは、特徴点が2つの物体に共有されることも許されている。

最後に、運動パラメータを一意に決定する。これは、$\alpha \in \mathcal{I}^X$ に対して $\bar{r}'^X_\alpha(\mathcal{M}^X) > 0$ かつ $\bar{r}^X_\alpha(\mathcal{M}^X) > 0$ という条件を満たす運動パラメータ $\mathcal{M}^X$ を $\mathcal{M}^X_{++}, \mathcal{M}^X_{+-}, \mathcal{M}^X_{-+}$ および $\mathcal{M}^X_{--}$ の中から選び出せばよい。実際には、ノイズの影響を小さくするため、次の量を最大にする運動パラメータを選択する。

$$J(\mathcal{M}^X) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}^X} \{sgn(\bar{r}_\alpha(\mathcal{M}^X)) + sgn(\bar{r}'_\alpha(\mathcal{M}^X))\} \tag{55}$$

ここで、関数 $sgn()$ は、次式で定義される。

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \\ -1 & \text{for } x < 0. \end{cases} \tag{56}$$

以上で、各物体の運動パラメータと特徴点のクラスタリングが終了し、それに対応する構造パラメータも計算された。

5 計算機シミュレーションによる検証

アルゴリズムの正当性を確かめるための計算機シミュレーションを、乱数を用いて生成した合成データを入力として行った。運動パラメータは、回転軸 $\mathbf{l}^A = (0.683763, -0.455842, 0.569803)$, $\mathbf{l}^B = (0.380143, -0.912343, 0.152057)$, 回転角 $\Omega^A = 30°$, $\Omega^B = 20°$ で並進ベクトル $\mathbf{h}^A = (0.659062, 0.746937, 0.087875)$, $\mathbf{h}^B = (-0.666667, -0.333333, -0.666667)$ とした。特徴点は、座標 X, Y, Z のそれぞれが、$[-50, 50]$、$[-50, 50]$、$[50, 100]$ なる区間からなる直方体内に一様に発生させた。特徴点は、各物体に 25 個ずつとした ($N^A = N^B = 25, N = 50$)。正規化ベクトルデータ $\mathbf{m}'_\alpha$, $\mathbf{m}_\alpha$ には 0.1% の一様なノイズを与え、再正規化したものをサンプルデータとして用いた。図2に生成データ、図3に基本テンソル推定時の固有値の分布、図4に基本行列の推定結果と真値、図5に並進ベクトル・回転パラメータ候補の推定結果、図6に選択された運動パラメータの一意解とその真値、図7に3次元構造の復元結果とその真値をそれぞれ示した。これらの計算結果から、正しくもとの運動パラメータの推定が可能であることと、この運動パラメータにもとづく特徴点の一撃的クラスタリングと物体の3次元構造の復元が可能であることを確認できた。

6 まとめ

本論文では、多重3次元剛体運動による画像面上の特徴点の変換が満たす基本拘束方程式を、透明視の普遍的計算理論である重ね合わせの原理に基づいて導出し、2組

の３次元剛体運動パラメータを、２枚の画像フレーム間の特徴点対応からセグメンテーションやクラスタリングを経ずに、直接解析的に求める線形アルゴリズムを提案した。さらに、推定された運動パラメータに基づいた一撃クラスタリングによって、特徴点を各物体に分離できることを示した。さいごに、数値シミュレーションによってその動作を確認した。本アルゴリズムは、計算全体の閉形式性を保持しつつ、中間段階で可能な限り多くの拘束条件を最適に満たすような数学的技法を取り入れることによって、ノイズに対してある程度のロバスト性を持つ準最適な線形アルゴリズムとなっている。

このアルゴリズムの存在は、十分多くの特徴点があり、それらが特殊な配置になければ、２個の剛体運動は、２フレームの特徴点対応の情報から一意に定まる、という解の一意性の構成的証明にもなっている。しかし、従来、線形アルゴリズムにおいて臨界曲面 (critical surface) などと呼ばれる特殊な条件を満たす曲面上にすべての特徴点がある場合には、アルゴリズムが破綻することが知られており [23] [10]、それと同様な意味で、本論文のアルゴリズムが破綻する特別な配置とその検出・回避方法についての研究が将来必要になろう。また、多重オプティカルフローの場合 [32] と同様に、トランスペアレンシーによって単一運動の場合の多義解 [24] [27] に加えて新たな多義性が特殊な配置によって生じる可能性がある。さらに、特徴点の配置が特殊でなくても、運動が単一の剛体運動であったり、関節物体の様に２個の物体の運動が互いに拘束されていたり、いづれかの物体に対応する特徴点の数が 8 点に満たない場合にも、本論文のアルゴリズムが破綻する可能性がある。これらの特殊な場合の研究もアルゴリズムの信頼性向上と適用可能領域の拡大のために必要である。

本論文では、計算原理の確認という目的から、実際的なノイズモデルなどは採り入れずにアルゴリズムを導出したが、従来、単一運動の線形アルゴリズムに対して研究されている様に、推定の偏差に対する対策 [18] や、エネルギー関数のノルムに統計的なノイズモデルにもとづいた推定方法を取り入れるとともに、非線形最適化手法との統合が実用に耐えるアルゴリズムには必要になる [35] [42] [7]。この場合にも、本アプローチが基本拘束方程式のレベルから展開されており、データに対する直接的な拘束条件となっているため、単一運動に対して考案された手法が直接応用できるというメリットがある。

また、今回は、運動立体視のうちで、特徴点対応にもとづく理論をトランスペアレンシーに拡張したが、オプティカルフローからの運動立体視 [21] [4] や、線特徴のフレーム間対応からの運動立体視 [20] [36] [44] に関しても、トランスペアレンシーへの拡張を研究する価値がある。

本論文の結果は、人間の運動立体視のメカニズムに直接関わるものではないが、網膜に投影された複数の異なる３次元運動物体に関して、２次元領域としての物体の分離と３次元構造の復元過程を経ずに、各動物体に関する大局的な３次元運動情報が復元されうるということを示しており、従来全く考えられていなかった新しい計算モデルの原理的可能性を示唆している。

参考文献

[1] G.Adiv: "Determining Three-Dimensional Motion and Structure from Optical Flow Generated by Several Moving Objects," *IEEE Trans. PAMI,* Vol.7, No.4, pp.384-401(1985).

[2] K.S.Arun, T.S.Huang and S.D.Blostein: "Least-squares fitting of two 3-D point sets," *IEEE Trans. PAMI,* Vol.9, pp.698-700(1987).

[3] T.E.Boult and L.G.Brown: "Factorization-based Segmentation of Motions," *Proc. IEEE Workshop on Visual Motion,* Princeton, NJ, pp.179-186(Oct.,1991).

[4] A.R.Bruss and B.K.P.Horn: "Passive Navigation," *Comput. Vision, Graphics and Image Process.,* **21**, 1, pp.3-20(1983).

[5] H.H.Chen and T.S.Huang: "Maximal matching of 3-D points for multiple-object motion estimation," *Pattern Recognition,* **21**, 2, pp.75-90(1988).

[6] クーラン、ヒルベルト(斉藤、銀林訳)：数理物理学の方法2、東京図書、東京(1959).

[7] K.Daniilidis and H.-H. Nagel: "Analytical results on error sensitivity of motion estimation from two views", *Image and Vision Computing*, **8**, 4, pp.297-303(1990).

[8] O.D.Faugeras and S.Maybank: "Motion from Point Matches: Multiplicity of Solutions," *IJCV,* 4, 3, pp.225-246(1990).

[9] C.L.Fennema and W.Thompson: "Velocity Determination in Scenes Containing Several Moving Objects," *CGIP,* Vol.9, pp.301-315(1979).

[10] B.K.P.Horn: "Relative Orientation," *IJCV,* 4, pp.59-78(1990).

[11] B.K.P.Horn: "Closed-form solution of absolute orientation using unit quarternions," *Journal of Optical Society of America,* **A**-4, pp.629-642(1987).

[12] B.K.P.Horn, H.M.Hilden and S.Negahdaripour: "Closed-form solution of absolute orientation using orthonormal matrices," *Journal of Optical Society of America,* **A**-5, pp.1128-1135(1988).

[13] T.S.Huang and O.D.Faugeras: "Some Properties of the E Matrix in Two-view Motion Estimation," *IEEE Trans. PAMI,* **11**, 12, pp.1310-1312(1989).

[14] 伊理、韓：「テンソル解析入門」、教育出版、東京 (1973).

[15] R.Jain and T.O.Binford: "Ignorance, myopia, and naiveté in computer vision systems," *CVGIP: Image Understanding*, **53**, 1, pp.112-117(1991) and replies to this dialogue in the same volume.

[16] 金谷健一：「3 次元認識の数理」、森北出版、東京 (1990).

[17] K.Kanatani: **Geometric Computation for Machine Vision**, Oxford Univ. Press, Oxford(1993, to appear).

[18] K.Kanatani: "Renormalization for Unbiased Estimation," *Proc. 4th Int. Conf. Comput. Vision*, Berlin, Germany(May,1993, to appear).

[19] S.-P.Liou and R.C.Jain: "An approach to three-dimensional image segmentation," *CVGIP: Image Understanding*, **53**, 3, pp.237-252(1991).

[20] Y.Liu and T.S.Huang: "A linear algorithm for motion estimation using straight line correspondences," *Comput. Vision, Graphics and Image Process.*, **44**, pp.35-57(1988).

[21] H.C.Longuet-Higgins and K.Prazdny: "The Interpretation of a Moving Retinal Image," *Proc. Royal Society of London,* **B208**, pp.385-397(1980).

[22] H.C.Longuet-Higgins: "A Computer Program for Reconstructing a Scene from Two Projections," *Nature,* **392**, pp.133-135(1981).

[23] H.C.Longuet-Higgins: "The reconstruction of a scene from two projections — Configuration that defeat the 8-point algorithm," *Proc. 1st IEEE Conf. on Artif. Intell. Applications*, Denver, CO, pp.395-397(December 1984).

[24] H.C.Longuet-Higgins: "Multiple interpretations of a pair of images of a surface," *Proc. Royal Society of London,* **A418**, pp.1-15(1988).

[25] D.W.Murray and B.F.Buxton: "Scene Segmentation from Visual Motion Using Global Optimization," *IEEE Trans. PAMI,* **9**, 2, pp.220-228(1987).

[26] S.Negahdaripour and B.K.P.Horn: "Direct Passive Navigation," *IEEE Trans. PAMI,* **9**, 1, pp.168-176(1987).

[27] S.Negahdaripour: "Multiple interpretations of the shape and motion of objects from two perspective images," *IEEE Trans. PAMI,* **12**, 11, pp.1025-1039(1990).

[28] S.Peleg and H.Rom: "Motion Based Segmentation," *Proc. 10th ICPR,* Atlantic City, NJ, Vol.I, pp.109-113(1990).

[29] 志沢雅彦:「多重3次元剛体運動のパラメータ推定法」、情報処理学会第41回全国大会, 4M-10(1990.9).

[30] 志沢雅彦:「多重3次元剛体運動の推定に向けて」、情報処理学会コンピュータビジョン研究会資料, **CV68-3**(1990.9).

[31] M.Shizawa and K.Mase: "Principle of Superposition: A Common Computational Framework for Analysis of Multiple Motion," *Proc. IEEE Workshop on Visual Motion,* Princeton, NJ(October,1991).

[32] M.Shizawa: "On visual ambiguities due to transparency in motion and stereo," in G.Sandini(ed.): Computer Vision — ECCV92, 2nd European Conference on Computer Vision, Lecture Notes in Computer Science, **588**, Springer-Verlag, pp.411-419(May,1992).

[33] M.Shizawa: "Transparency in 3D Motion Vision: constraint equation of point correspondences and linear analytical solution", *Proc. Meeting on Image Recognition and Understanding(MIRU'92),* Sapporo City, Japan, **1**, pp.95-102(July, 1992).

[34] 志沢雅彦、間瀬健二:「多重オプティカルフロー:基本拘束方程式と運動透明視・運動境界検出の統一計算理論」信学論 (D-II), 採録決定済.

[35] M.E.Spetsakis and J.Y.Aloimonos: "Optimal computing of structure from motion using point correspondences in two frames," *Proc. IEEE 2nd Int. Conf. Comput. Vision,* Tampa, FL, pp.449-453(December, 1988).

[36] M.E.Spetsakis and J.Y.Aloimonos: "Structure from Motion Using Line Correspondences," *Int. J. Comput. Vision,* **4**, pp.171-183(1990).

[37] C.Tomasi and T.Kanade: "Shape and motion from image streams under orthography: a factorization method," *Int. J. Comput. Vision,* **9**, 2, pp.137-154(1992).

[38] R.Y.Tsai and T.S.Huang: "Uniqueness and estimation of three-dimensional motion parameters of rigid objects with curved surfaces," *IEEE Trans. PAMI,* **6**, pp.13-27(1984).

[39] S.Ullman: **The Interpretation of Visual Motion**, MIT Press, Cambridge Mass.(1979).

[40] S.Ullman: "The Interpretation of Structure from Motion," *Proc. Royal Society of London,* **B203**, pp.405-426(1979).

[41] B.L. ファン・デル・ウェルデン (前田訳)：「代数幾何学入門」、シュプリンガー・ファーラーク、東京 (1991).

[42] J.Weng, N.Ahuja and T.S.Huang: "Optimal motion and structure estimation," *Proc. CVPR'89,* San Diego, CA, pp.144-152(June, 1989).

[43] J.Weng, T.S.Huang and N.Ahuja: "Motion and Structure from Two Perspective Views: Algorithms, Error Analysis, and Error Estimation," *IEEE Trans. PAMI,* 11, 5, pp.451-476(1989).

[44] J.Weng, T.S.Huang and N.Ahuja: "Motion and structure from line correspondences: closed-form solution, uniqueness, and optimization," *IEEE Trans. PAMI,* 14, 3, pp.318-336(1992).

[45] Z.Zhang, O.D.Faugeras and N.Ayache: "Analysis of a Sequence of Stereo Scenes Containing Multiple Moving Objects Using Rigidity Constraints," *Proc. 2nd ICCV,* pp.177-186(1988).

[46] X.Zhuang, T.S.Huang and R.M.Haralick: "Two-View Motion Analysis: A Unified Algorithm," *J. Opt. Soc. Am.,* **A-3**, pp.1492-1500(1986).

付録1　基本テンソル推定アルゴリズムの導出

エネルギー関数 (30) が最小値をとる条件は、次の関数の停留条件と同値である [6]。

$$\mathcal{F}\left(\hat{\mathbf{G}}^{AB},\lambda\right)=\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\sum_{i,j,k,l=1}^{3}\hat{G}^{AB}_{\substack{(ik)\\(jl)}}m'_{\alpha(i)}m_{\alpha(j)}m'_{\alpha(k)}m_{\alpha(l)}\right)^2+\lambda\left(4-\|\hat{\mathbf{G}}^{AB}\|^2\right) \tag{57}$$

停留条件は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{F}\left(\hat{\mathbf{G}}^{AB},\lambda\right)}{\partial\hat{G}^{AB}_{\substack{(i'k')\\(j'l')}}} &= \frac{2}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\sum_{i,j,k,l=1}^{3}\hat{G}^{AB}_{\substack{(ik)\\(jl)}}m'_{\alpha(i)}m_{\alpha(j)}m'_{\alpha(k)}m_{\alpha(l)}\right)m'_{\alpha(i')}m_{\alpha(j')}m'_{\alpha(k')}m_{\alpha(l')}\\ &\quad -2\lambda\hat{G}^{AB}_{\substack{(i'k')\\(j'l')}}\\ &= 2\sum_{i,j,k,l=1}^{3}\hat{G}^{AB}_{\substack{(ik)\\(jl)}}\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}m'_{\alpha(i)}m_{\alpha(j)}m'_{\alpha(k)}m_{\alpha(l)}m'_{\alpha(i')}m_{\alpha(j')}m'_{\alpha(k')}m_{\alpha(l')}\\ &\quad -2\lambda\hat{G}^{AB}_{\substack{(i'k')\\(j'l')}}=0\end{aligned} \tag{58}$$

ここで、i',j',k',l' は、それぞれ 1,2,3 を動く。λ に関しては、

$$\frac{\partial\mathcal{F}\left(\hat{\mathbf{G}}^{AB},\lambda\right)}{\partial\lambda}=4-\left\|\hat{\mathbf{G}}^{AB}\right\|^2=0 \tag{59}$$

であり、これは正規化条件に他ならない。ここで、相関テンソルの定義 (31) によって、方程式 (58) は、次の形になる。

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{3}\hat{G}^{AB}_{\substack{(ik)\\(jl)}}C_{ijkli'j'k'l'}=\lambda\hat{G}^{AB}_{\substack{(i'k')\\(j'l')}} \tag{60}$$

ここで、添字 i',j',k',l' の組合せは全部で 81 通りであるが、対称性から独立な方程式数は 36 個である。この 36 元の連立方程式において、対称性により互いに同値になる方程式の数で式全体の重み付けを行う。これは、各方程式の中で対称性から生じる各項の重みと対応させ、行列 M を対称行列にするために必要である。方程式 (60) を式 (33) の定義を考慮して整理すると式 (34) が得られる。

付録2　基本行列の単位行ベクトル、単位列ベクトルの計算アルゴリズムの導出

式 (41) を考慮すると、(42) の行列 $\mathbf{S}_i$ は、単位行ベクトル $\mathbf{b}_i^A$ および $\mathbf{b}_i^B$ 同士のテンソル積を用いて次の形に書ける。

$$\mathbf{S}_i \;=\; \frac{1}{2}\zeta_i^A\zeta_i^B\left(\mathbf{b}_i^A\otimes\mathbf{b}_i^B+\mathbf{b}_i^B\otimes\mathbf{b}_i^A\right)$$

$$= \zeta_i^A \zeta_i^B \left[\left\{ \frac{1}{2}\left(\mathbf{b}_i^A + \mathbf{b}_i^B\right) \right\} \left\{ \frac{1}{2}\left(\mathbf{b}_i^A + \mathbf{b}_i^B\right) \right\}^T - \left\{ \frac{1}{2}\left(\mathbf{b}_i^A - \mathbf{b}_i^B\right) \right\} \left\{ \frac{1}{2}\left(\mathbf{b}_i^A - \mathbf{b}_i^B\right) \right\}^T \right] \tag{61}$$

ここで、$\left\|\mathbf{b}_i^A\right\| = \left\|\mathbf{b}_i^B\right\| = 1$ より、$\left(\mathbf{b}_i^A + \mathbf{b}_i^B, \mathbf{b}_i^A - \mathbf{b}_i^B\right) = \left\|\mathbf{b}_i^A\right\|^2 - \left\|\mathbf{b}_i^B\right\|^2 = 0$ となるので、$\mathbf{b}_i^A + \mathbf{b}_i^B$ と $\mathbf{b}_i^A - \mathbf{b}_i^B$ は互いに垂直である。一方、行列 $\mathbf{S}_i$ の固有値展開は、(43) となる。

誤差の無い理想的な場合、$\mathbf{S}_i$ の階数は、2 以下となるはずである (証明省略、$\det \boldsymbol{S}_i = 0$ を示せばよい)。したがって、$\sigma_{i0} = 0$ であるから、固有値展開の一意性と固有ベクトル同士の直交性より、式 (61) の最後の辺は、この固有値展開に対応する。しかし、実際には、誤差のため、$\sigma_{i0} \neq 0$ となる。この誤差の影響をなるべく小さくとどめるため、$\sigma_{i0} = 0$ となるように、固有値全体をずらして、$\sigma_{i+} - \sigma_{i0}, \sigma_{i-} - \sigma_{i0}$ を、それぞれ σ_{i+}、σ_{i-} の代わりに用いることにすれば、次の対応が成り立つ。$\zeta_i^A \zeta_i^B > 0$ の場合:

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma_{i+} - \sigma_{i0}}\mathbf{s}_{i+} &= \frac{\sqrt{\zeta_i^A \zeta_i^B}}{2}\left(\mathbf{b}_i^A + \mathbf{b}_i^B\right) \\ \sqrt{\sigma_{i0} - \sigma_{i-}}\mathbf{s}_{i-} &= \frac{\sqrt{\zeta_i^A \zeta_i^B}}{2}\left(\mathbf{b}_i^A - \mathbf{b}_i^B\right) \end{aligned} \tag{62}$$

この 2 個の式の和と差をとって、次式を得る。

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma_{i+} - \sigma_{i0}}\mathbf{s}_{i+} + \sqrt{\sigma_{i0} - \sigma_{i-}}\mathbf{s}_{i-} &= \sqrt{\zeta_i^A \zeta_i^B}\mathbf{b}_i^A \\ \sqrt{\sigma_{i+} - \sigma_{i0}}\mathbf{s}_{i+} - \sqrt{\sigma_{i0} - \sigma_{i-}}\mathbf{s}_{i-} &= \sqrt{\zeta_i^A \zeta_i^B}\mathbf{b}_i^B \end{aligned} \tag{63}$$

$\zeta_i^A \zeta_i^B < 0$ の場合は、同様にして、

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma_{i+} - \sigma_{i0}}\mathbf{s}_{i+} - \sqrt{\sigma_{i0} - \sigma_{i-}}\mathbf{s}_{i-} &= \sqrt{-\zeta_i^A \zeta_i^B}\mathbf{b}_i^A \\ \sqrt{\sigma_{i+} - \sigma_{i0}}\mathbf{s}_{i+} + \sqrt{\sigma_{i0} - \sigma_{i-}}\mathbf{s}_{i-} &= \sqrt{-\zeta_i^A \zeta_i^B}\mathbf{b}_i^B \end{aligned} \tag{64}$$

を得る。ここで、$\|\mathbf{s}_{i+}\| = \|\mathbf{s}_{i-}\| = 1$ および、$(\mathbf{s}_{i+}, \mathbf{s}_{i-}) = 0$ から
$\|\sqrt{\sigma_{i+} - \sigma_{i0}}\mathbf{s}_{i+} \pm \sqrt{\sigma_{i0} - \sigma_{i-}}\mathbf{s}_{i-}\| = \sqrt{\sigma_{i+} - \sigma_{i-}}$ であることがわかるので、これと、$\mathbf{b}_i^A$ と $\mathbf{b}_i^B$ が単位ベクトルであることを用いると公式 (44) が得られる。単位列ベクトル $\mathbf{c}_j^A, \mathbf{c}_j^B$ に関しても同様にして (48) が得られる。

付録 3　係数ベクトル ζ および η の計算アルゴリズムの導出

式 (49) を条件 $\|\boldsymbol{\nu}\| = \sqrt{\|\zeta\|^2 + \|\eta\|^2} = 2$ のもとで最小化する問題はラグランジュ乗数 ρ を用いて、次の関数の停留化問題に帰着される。

$$\mathcal{L}(\zeta, \eta, \rho) = \sum_{i,j=1}^{3} (\zeta_i b_{ij} - \eta_j c_{ji})^2 + \rho(4 - \|\zeta\|^2 - \|\eta\|^2) \tag{65}$$

停留条件より、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta},\rho)}{\partial \zeta_{i'}} &= 2\sum_{j=1}^{3} b_{i'j}(\zeta_{i'}b_{i'j} - \eta_j c_{ji'}) + 2\rho\zeta_{i'} = 2\left\{\zeta_{i'}\|\mathbf{b}_{i'}\|^2 - \sum_{j=1}^{3}\eta_j b_{i'j}c_{ji'} - \rho\zeta_{i'}\right\} = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta},\rho)}{\partial \eta_{j'}} &= 2\sum_{i=1}^{3} c_{j'i}(\zeta_i b_{ij'} - \eta_{j'}c_{j'i}) + 2\rho\eta_{j'} = 2\left\{\sum_{i=1}^{3}\zeta_i b_{ij'}c_{j'i} - \eta_{j'}\|\mathbf{c}_{j'}\|^2 - \rho\eta_{j'}\right\} = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta},\rho)}{\partial \rho} &= 4 - \|\boldsymbol{\zeta}\|^2 - \|\boldsymbol{\eta}\|^2 = 0 \qquad (66)
\end{aligned}$$

$\|\mathbf{b}_{i'}\| = \|\mathbf{c}_{j'}\| = 1$ を用いて簡略化し、整理すると固有値問題 (50),(51),(52) が得られる。

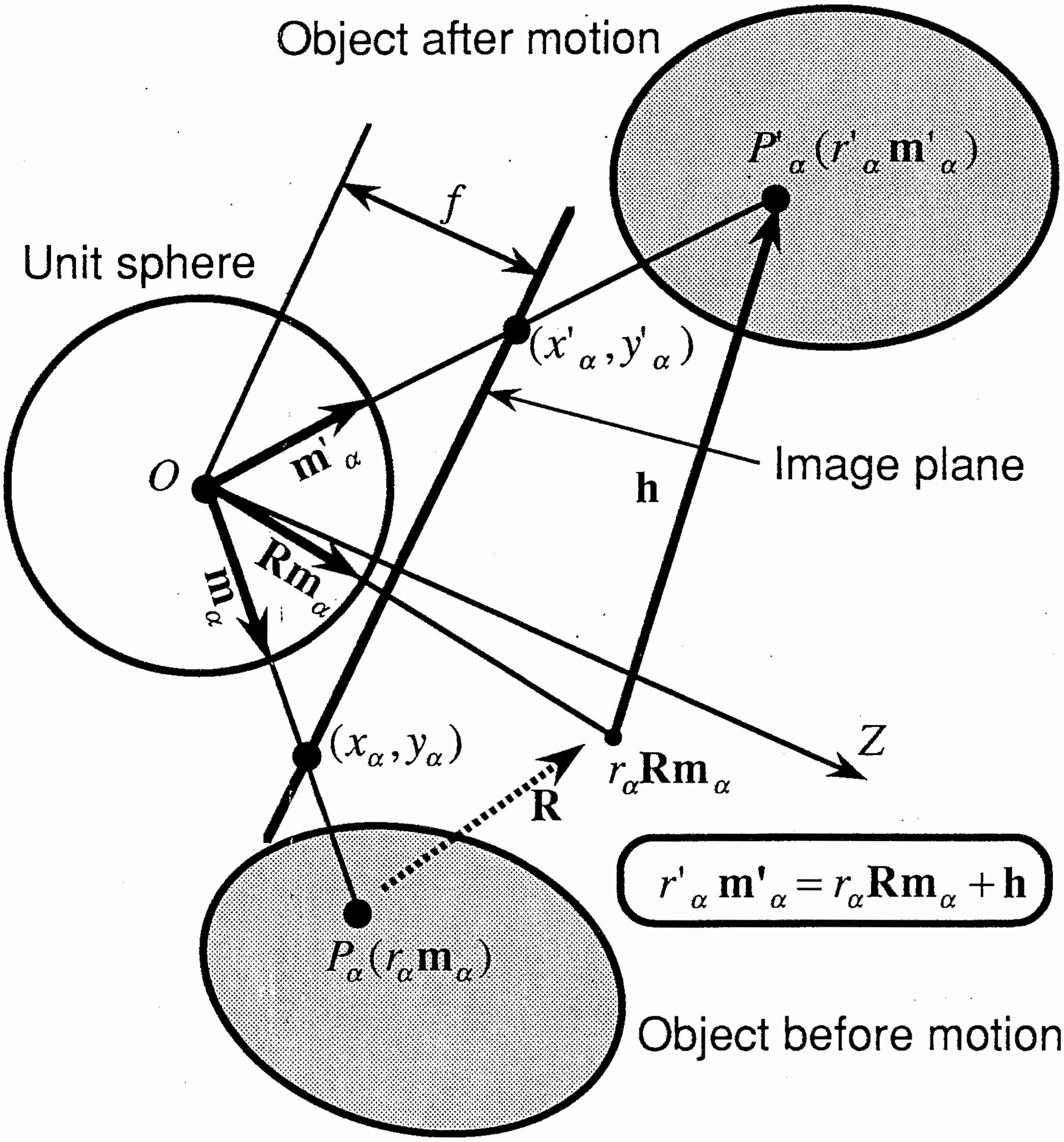
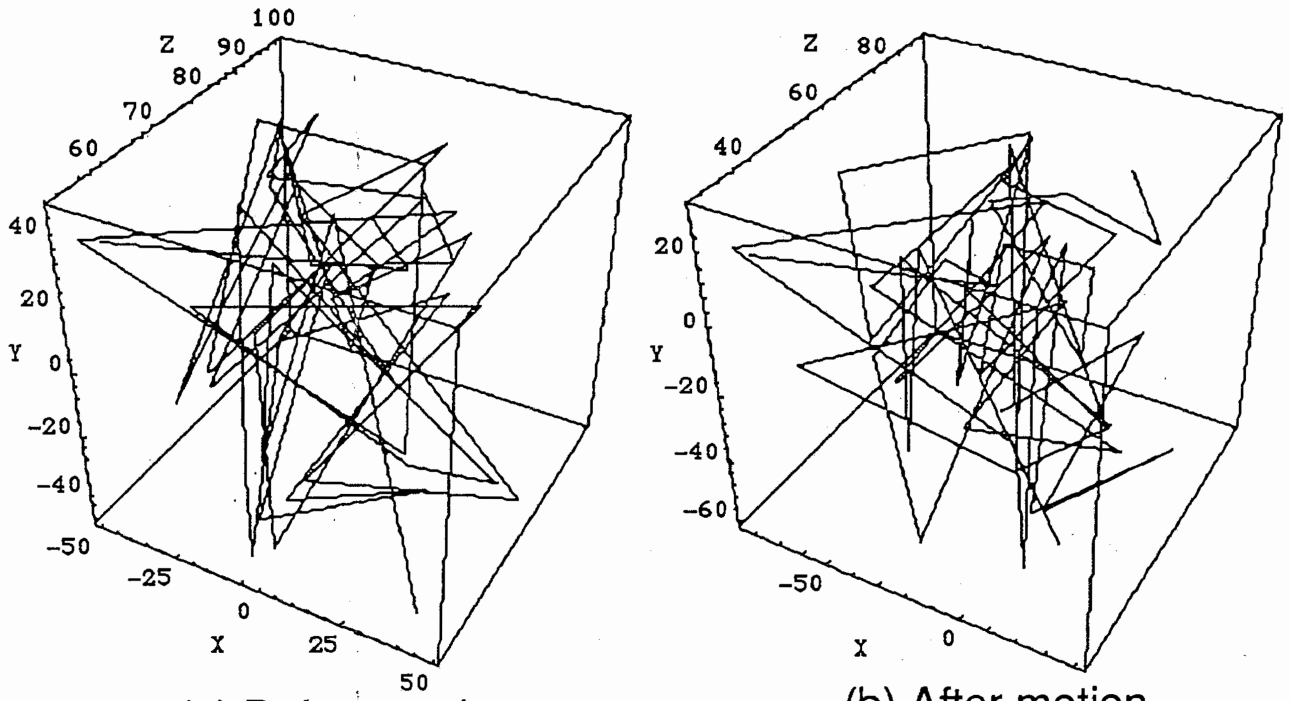


図1　3次元剛体運動と特徴点対応の投影像の幾何学

Fig.1 Geometry of rigid 3D motion and projected image of feature point correspondences.



(a) Before motion (b) After motion

図2 シミュレーションのために生成された特徴点対応データ

Fig.2 Sample feature correspondence data generated randomly for simulation.
Two objects are generated and superposed for computer simulation. (a) shows objects before motion. (b) shows objects after motion. The feature points are connected by lines only for display. See text for motion and structure parameters.

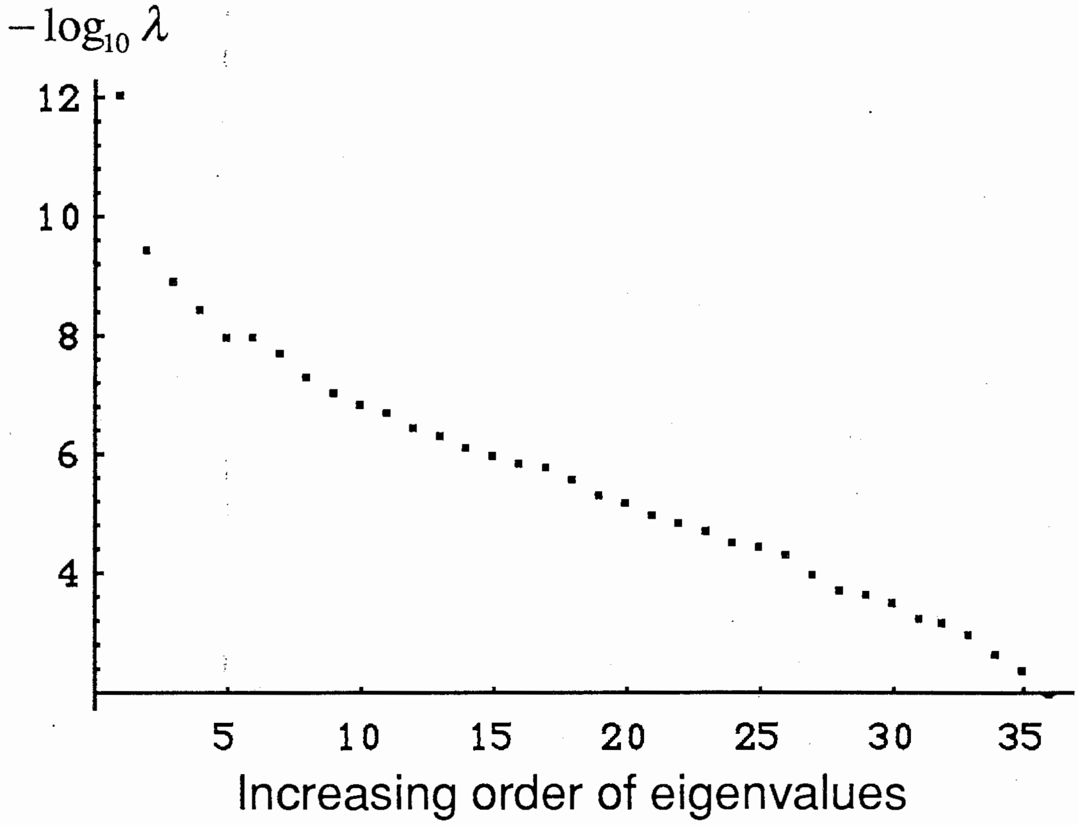


図3 基本テンソル推定時の固有値の分布

Fig.3 Distribution of the eigenvalues in the estimation of essential tensor.
The 36-dimensional linear parameters are estimated optimally by an eigensystem. This figure plots negations of logarithms of the eigenvalues in decreasing order. The leftmost point corresponds to the minimal eigenvalue whose eigenvector is the optimal estimates. Note that the first and the second eigenvalues are well separated.

$\overline{\mathbf{G}}^A$

Estimated essential matix of object A:

-0.189113	-0.158261	-0.70989
0.106949	0.225127	0.611715
0.537424	-0.83453	0.1169

$\overline{\mathbf{G}}^B$

Estimated essential matix of object B:

0.0852496	-0.613755	0.405199
0.411329	-0.127486	-0.836072
-0.295747	0.692699	0.00963156

True essential matrix of object A:

0.187865	0.150824	0.712458
-0.10301	-0.231092	-0.614874
-0.533406	0.833106	-0.117002

True essential matrix of object B:

-0.0844481	0.619377	-0.405951
-0.421921	0.129715	0.833094
0.295409	-0.684235	-0.010596

図4 基本行列の推定結果と真値

Fig.4 Estimated and expected essential matrices of two objects. The essential tensor is decomposed into two essential matrices by solving several eigensystems. Note that the essential matrices has the sign ambiguity.

$\overline{\mathbf{h}}^A$

-0.657565	-0.749269	-0.0787612

$\overline{\mathbf{h}}^B$

-0.67403	-0.334205	-0.65878

$-\overline{\mathbf{h}}^A$

0.657565	0.749269	0.0787612

$-\overline{\mathbf{h}}^B$

0.67403	0.334205	0.65878

(a) Translation vectors

$\overline{\mathbf{R}}^A$

0.929521	-0.325633	-0.173071
0.243841	0.89481	-0.373975
0.276644	0.305416	0.911147

$\overline{\mathbf{R}}^B$

0.207315	0.559199	0.802694
0.541867	-0.748791	0.381697
0.814494	0.355822	-0.458247

$\overline{\mathbf{I}}_{\overline{\mathbf{h}}^A}\overline{\mathbf{R}}^A$

0.143247	0.9574	-0.25073
0.978535	-0.174937	-0.108929
-0.148151	-0.229745	-0.961909

$\overline{\mathbf{I}}_{\overline{\mathbf{h}}^B}\overline{\mathbf{R}}^B$

0.948516	-0.0724476	-0.308332
0.0312298	0.990137	-0.136577
0.315186	0.119916	0.941423

(b) Rotation matrices

図5 基本行列の分解によって得られた各物体の並進ベクトル・回転行列の候補

Fig.5 Candidates for the translation vectors and rotation matrices obtained by decomposition of the essential matrices.
Each object has four-fold ambiguities in the motion parameters. However these ambiguities can be resolved at later stage of structure recovery.

$-\overline{\mathbf{h}}^A$

0.657565	0.749269	0.0787612

$\overline{\mathbf{h}}^B$

-0.67403	-0.334205	-0.65878

True translation vector of object A:

0.659062	0.746937	0.087875

True translation vector of object B:

-0.666667	-0.333333	-0.666667

(a) Selected translation vectors and their true values
(true vectors are normalized)

Selected rotation matrices for each object: $\overline{\mathbf{R}}^A, \overline{\mathbf{I}}_{\overline{\mathbf{h}}^B}\overline{\mathbf{R}}^B$

$\overline{\mathbf{l}}^A$

0.683464	-0.452411	0.572888

$\overline{\mathbf{l}}^B$

0.376014	-0.914064	0.151989

True rotation axis vector of object A:

0.683763	-0.455842	0.569803

True roation axis vector of object B:

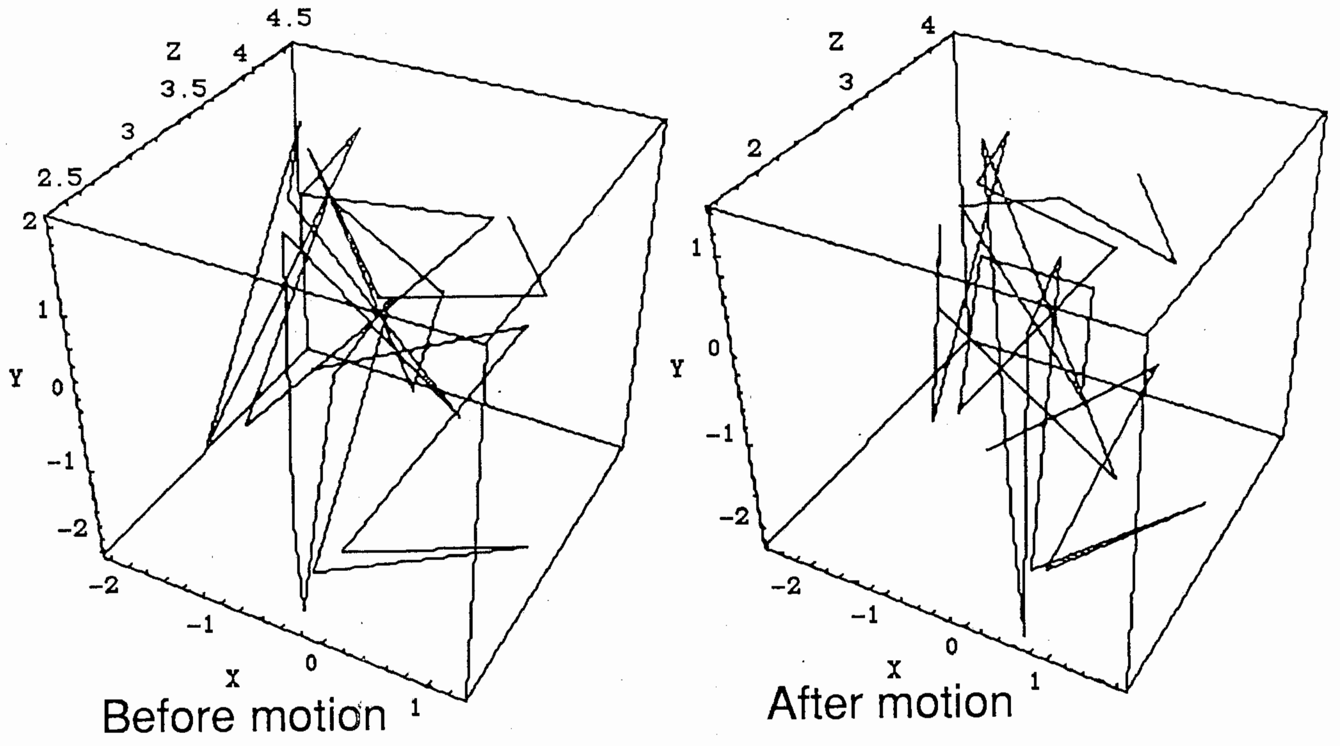
0.380143	-0.912343	0.152057

$\overline{\Omega}^A$	29.803	$\overline{\Omega}^B$	19.942
True rotation angle:	30.	True rotation angle:	20.

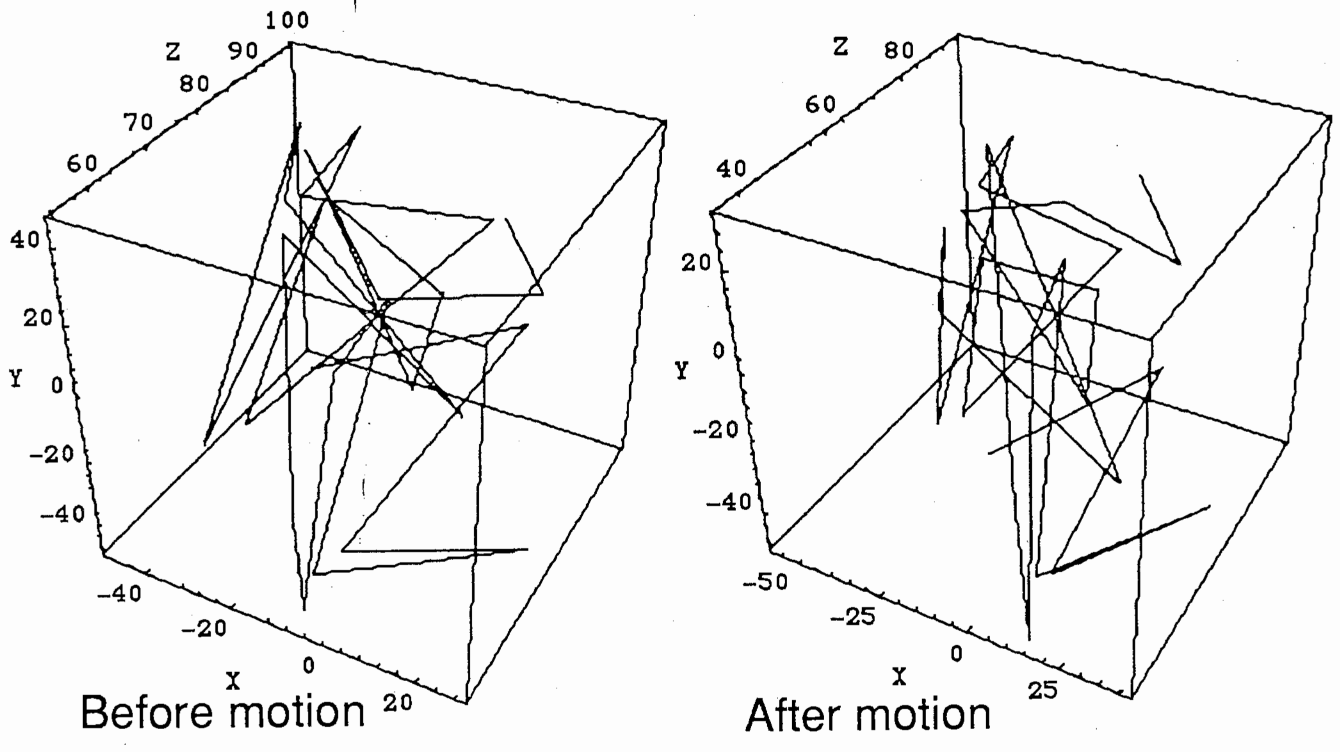
(b) Rotation axis vectors and rotation angles computed
from selected rotation matrices.

図6 物体構造パラメータの符号にもとづいて選択された
運動パラメータの一意解とその真値

Fig.6 Selected unique solution of motion parameters by testing the sign of the object structure parameters. See text for selection algorithm.



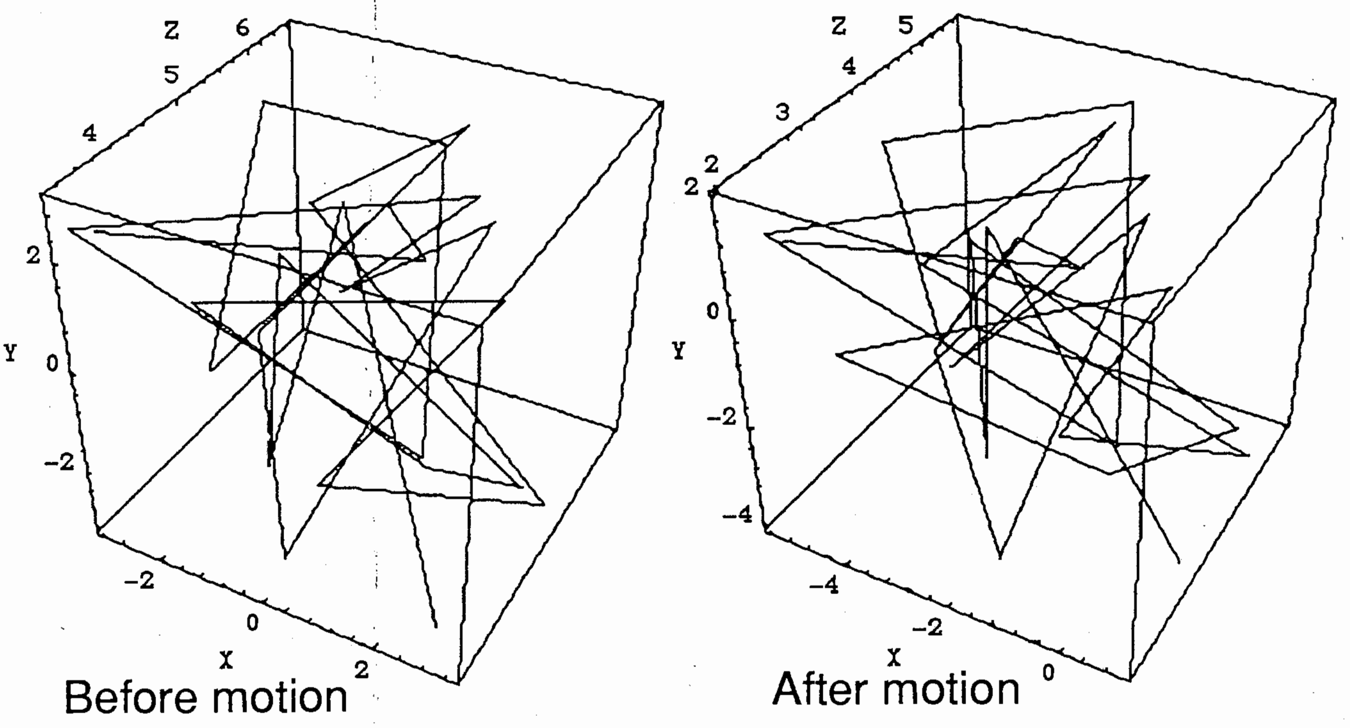
(a) Recovered structure of object A



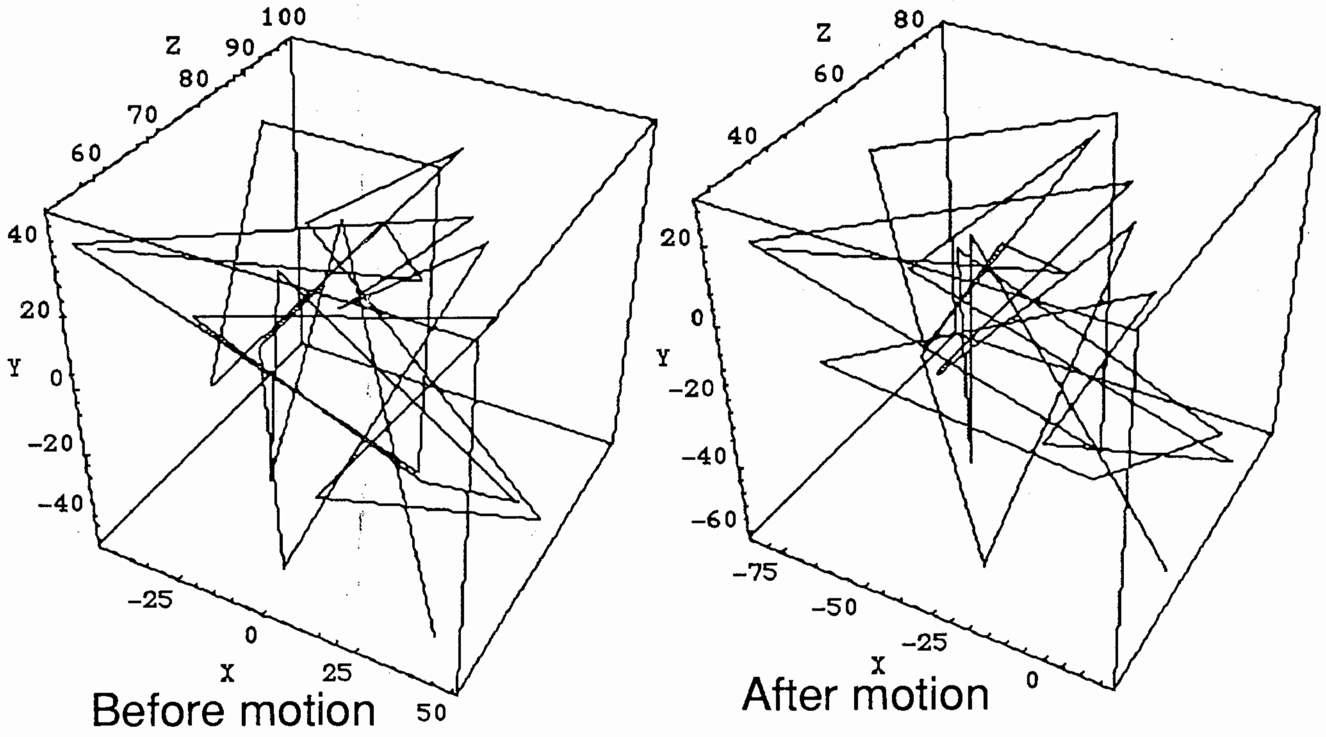
(b) True structure of object A

図7　3次元物体構造の復元結果と真値

Fig.7 Recovered 3D structures of the objects.
The two superposed objects are separated correctly and their 3D structures are recovered. Note that absolute scales cannot be recovered in principle.



(c) Recovered structure of object B



(d) True structure of object B

図7　3次元物体構造の復元結果と真値

Fig.7 Recovered 3D structures of the objects.
The two superposed objects are separated correctly and their 3D structures are recovered. Note that absolute scales cannot be recovered in principle.