

TR-A-0107

0058

測定用専用物体を使用しない
カメラキャリブレーション
— 理論とデータ解析 —

深田 陽司

1991. 3.25

ATR 視聴覚機構研究所

〒619-02 京都府相楽郡精華町乾谷 ☎07749-5-1411

ATR Auditory and Visual Perception Research Laboratories

Inuidani, Sanpeidani, Seika-cho, Soraku-gun, Kyoto 619-02 Japan

Telephone: +81-7749-5-1411

Facsimile: +81-7749-5-1408

Telex: 5452-516 ATR J

目次

あらまし	
Abstract	
1. まえがき	1
2. カメラパラメータと問題設定	2
2. 1 座標系	2
2. 2 カメラシステム	2
2. 3 第1カメラ座標系	5
2. 4 第2カメラ座標系	6
2. 5 第3カメラ座標系	6
2. 6 第4カメラ座標系	7
3. カメラ固有パラメータ	8
3. 1 画像中心	8
3. 2 アスペクト比	8
3. 2. 1 1枚の画像観測	8
3. 2. 2 2枚の画像観測	9
3. 2. 3 物理的情報からの算出	9
4. 回転角の算出	10
4. 1 第3画像による回転角の算出	10
4. 2 第4画像による回転角の算出	10
4. 3 ψ と ϕ の決定	11
5. 平行移動と焦点距離の算出	12
5. 1 第4カメラ座標系の平行移動と焦点距離	12
5. 2 第3カメラ座標系の平行移動と焦点距離	13
5. 3 第2カメラ座標系の平行移動と焦点距離	13
5. 4 第1カメラ座標系の平行移動と焦点距離	14

6. 実験結果	15
6. 1 画像中心	15
6. 2 アスペクト比	15
6. 2. 1 1枚の画像観測からの算出	15
6. 2. 2 2枚の画像観測からの算出	15
6. 2. 3 物理的情報からの算出	18
6. 3 回転・平行移動の算出	18
7. 誤差解析と対策	24
7. 1 焦点距離	24
7. 2 平行移動の大きさ	25
7. 3 適切な参照点の組	25
7. 4 評価	25
8. あとがき	26
謝辞	26
参考文献	26
表 1 - 1 5	27
付録 A: 画像座標表現とカメラ座標表現	43
付録 B: 第 4 画像による回転角の算出	44
付録 C: 回転角 ψ の算出	45
付録 D: 回転角 ϕ の算出	47

あらまし

コンピュータビジョンにおいて2次元の画像から3次元情景を復元する際、高精度なカメラキャリブレーションが望まれる。それ故、キャリブレーションに関するこれまでの研究は、測定用の専用物体を使用し精度を追求することに主眼がおかれていた。しかし、移動ロボットを想定すると、これまでの手法は現実的でなく、また対処できない状況も起こり得る。本稿では移動ロボットに搭載されたカメラのキャリブレーションを実現する手法を提案する。ワールド座標軸としては、部屋の隅や建物の角を構成する3本の稜線を採用し、まず回転を算出する。次に、ワールド座標値が既知の点が2つ以上その近辺に存在することを仮定して、平行移動を算出する。最後に、精度測定のための実験を行い、本手法の効果を確かめた。

Abstract

In this paper, a new camera calibration method without a test object to be measured is described. This method has been developed for a camera mounted on a mobile robot. The 3 edges at the corner of a room or a building are adopted as the 3 World axes. First, our method calculates the 3 rotational parameters using these 3 edges. Second, the 3 translational parameters are calculated using 2 or more than 2 reference points that are assumed to exist near the corner. Finally, experiments using over the counter goods are executed in order to ensure the efficiency of our method.

1 まえがき

コンピュータビジョンにおける研究は、カメラに関するパラメータは既知のものとして構築されているものが殆どである。理論の構築のみであれば実際の値をしらなくてもよいが、いったん実画像に適用しようとするれば真に既知のものとしなければならない。

カメラパラメータを算出するための研究は、測定用の専用物体を設置し精度を向上させる手法の開発が主眼であった[1]～[4]。カメラが固定されている状況においては一度測定すればよく、精度が良いにこしたことはない。ところで移動ロボットに搭載されたカメラを考えると、対象となる情景は次々と変わり画像中心とアスペクト比以外のカメラパラメータは動的に変化するので、その都度キャリブレーションを行なわねばならない。これまでの手法を利用しようとするれば、測定用物体を自ら運搬し、直面している情景の中に設置する必要がある。しかしこの方法は現実的でなく、また情景によっては設置できないこともある。

本稿ではこのような状況においてもカメラパラメータが算出できる手法について述べる。移動ロボットに搭載されたカメラを想定し、パラメータ算出のための観測すべき対象は部屋の隅や建物の角等とする。そのため、移動ロボットの作業（興味ある物体の認識やその位置・姿勢の決定）対象となるシーンから、部屋の隅シーンへカメラを回転し、このシーンを利用してパラメータを算出した後順次戻って行って、興味あるシーンのキャリブレーションを行なう。

本稿では次の順序で議論を展開する。まず2章では問題を明かにするために、いくつかの座標系を設定しそれらの間に成り立つ関係を述べる。更に、対象となるカメラシステムに対する要求と変数の定義を行なう。3章ではカメラパラメータのうち、測定時に動的に変化しないカメラ固有パラメータの算出方法について述べる。4章ではカメラ座標系のワールド座標系に対する3つの回転角の算出について述べる。5章では平行移動の3つのパラメータ及び焦点距離の算出について述べる。6章では本稿で展開した議論の中心部分を確認しその効果を調べるための実験結果について述べる。7章では誤差について解析する。

2 カメラパラメータと問題設定

2. 1 座標系

本稿では6つの座標系を設定する。即ち、ワールド座標系 $0_w X_w Y_w Z_w$ ，第1カメラ座標系 $0_1 X_1 Y_1 Z_1$ ，第2カメラ座標系 $0_2 X_2 Y_2 Z_2$ ，第3カメラ座標系 $0_3 X_3 Y_3 Z_3$ ，第4カメラ座標系 $0_4 X_4 Y_4 Z_4$ ，画像座標系 $0_i UV$ である。そのうちの4つを図1に示す。本節ではこれらの座標系間の関係を定式化し、本稿で解くべき問題を明確にする。なお、カメラによる撮像など各カメラ座標系に共通することを述べる時には単純にカメラ座標系 $0_c X_c Y_c Z_c$ と呼ぶ。

これらの座標系は全て左手系で定義されており、それぞれの座標系における点やベクトルの表現を区別するために上に述べた座標系の順に、 (\dots) ， $\langle \dots \rangle$ ， $\langle \langle \dots \rangle \rangle$ ， $[\dots]$ ， $[\dots]$ ， $\{\dots\}$ の表記を用いる。本稿では平行移動も線型で扱えるように式の展開には同次座標表現を使用し、単純に点やベクトルを表す時には普通座標表現を用いることとする。

2. 2 カメラシステム

まずカメラシステムについて述べる。図2に示すように、カメラはピンホールカメラとみなし、レンズ中心をカメラ座標系の原点として画像面は光軸 (Z_c 軸) に直交して、前方の焦点距離の位置に設置されているとする。光軸と画像面との交点を画像原点とし、 U 軸と X_c 軸， V 軸と Y_c 軸は平行とする。図3 a に示すように、カメラはシステムに固定の点 (以後、回転中心と呼ぶ) を中心にして、自身の軸方向まわりに回転できる機構をもつ。本稿では回転は、全て軸の正方向からみて時計方向とする。焦点距離の変更は図4に示すように、撮像面はカメラシステムに対して不動のままレンズの Z_c 軸方向の移動によって行なわれ、その移動距離は測定できるものとする。撮像面は、論理的に長方形の撮像素子が配列の如く並べられているものとする。

カメラパラメータには、カメラシステムに固有のものと撮像時に動的に変化するものの2種類がある。前者には画像中心 (画像原点) と1画素の大きさ (撮像素子の横と縦の長さ) があり、後者には焦点距離 (レンズ中心と撮像面との距離) ，カメラの回転中心からレンズ中心へのベクトル，ワールド座標系に対する回転

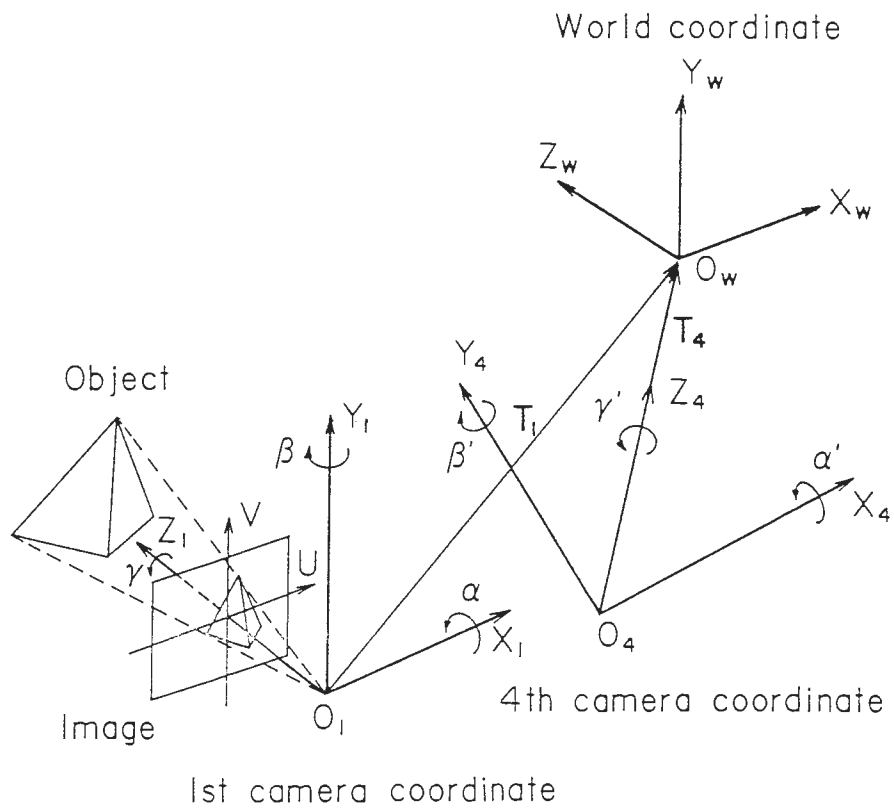


図 1. 座標系の設定

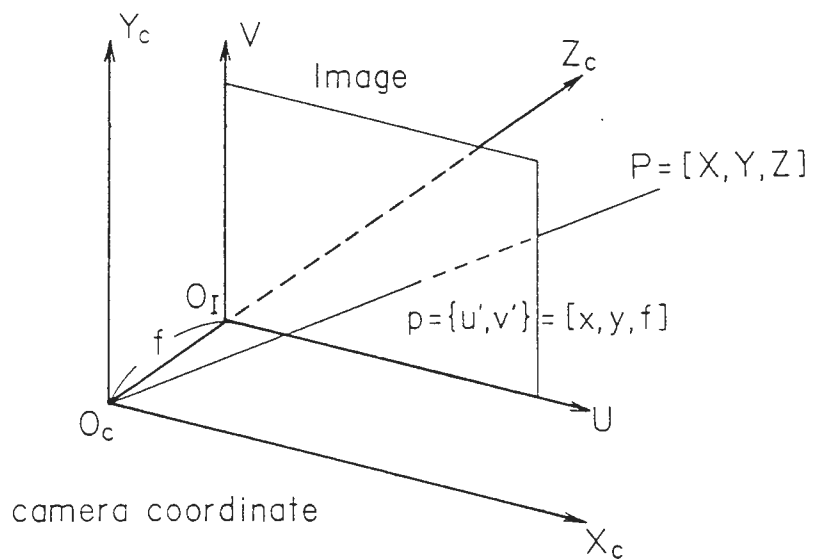
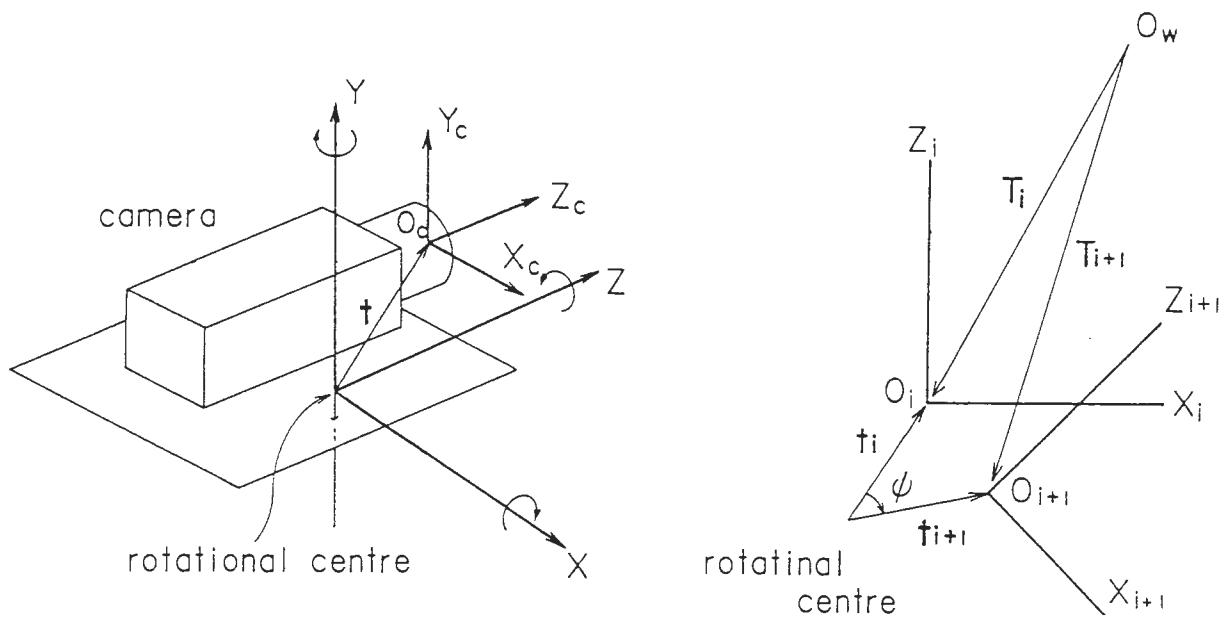


図 2. 中心投影



a. 俯瞰図

b. Y軸まわりの回転

図 3. カメラの回転

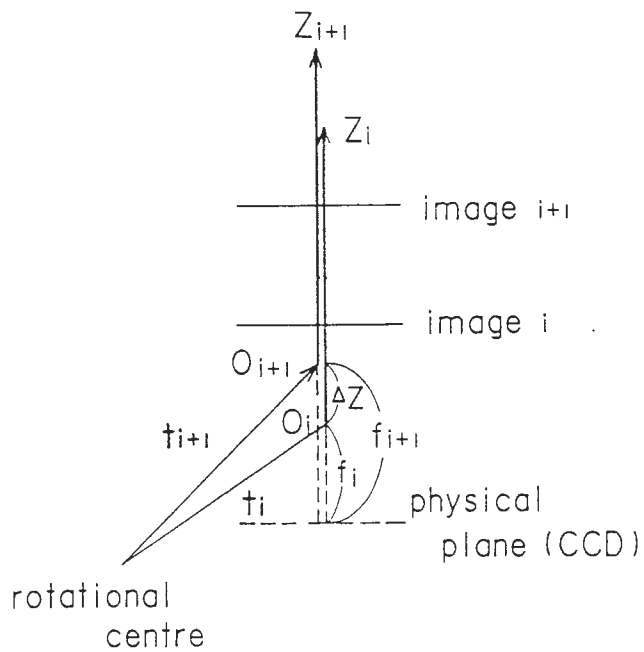


図 4. 焦点距離の変更

・平行移動がある。以下にいくつかのパラメータを定義する。なお、添字 i は第 i カメラ座標系におけるパラメータであることを指し、第 i カメラ座標系で撮像した画像を第 i 画像と呼ぶ。

s_x : 1画素あたりの X_c 軸方向の長さ (mm/pixel)

s_y : 1画素あたりの Y_c 軸方向の長さ (mm/pixel)

f_i : 焦点距離 (mm)

$f_{ix} = f_i / s_x$: X_c 軸方向の焦点距離 (pixel)

$f_{iy} = f_i / s_y$: Y_c 軸方向の焦点距離 (pixel)

$rat = s_y / s_x$: アスペクト比 (無単位)

t_i : カメラ回転中心から O_i へのベクトル (mm)

(以後第 i 回転変位ベクトルと呼ぶ)

T_i : O_w から O_i への平行移動ベクトル (mm)

カメラ座標系と画像座標系は、点 $P = [X_c, Y_c, Z_c]$ が $p = [x_c, y_c, f_i] = \{u', v'\}$ に撮像されたとすると、(1) によって関係づけられる。ここで $[P]$ は $\langle P \rangle$, $\langle\langle P \rangle\rangle$, $[P]$, $[P]$ のどれかを表す。

$$\begin{aligned} x_c &= f_i X_c / Z_c, & y_c &= f_i Y_c / Z_c, \\ u' &= x_c / s_x, & v' &= y_c / s_y \end{aligned} \quad (1)$$

2. 3 第1カメラ座標系

認識などの作業対象となる物体を撮像しているカメラ座標系を第1カメラ座標系と呼ぶ。第1カメラ座標系は図1に示すように、ワールド座標系から $T_1 = (T_x, T_y, T_z)$ 平行移動しており、 Y_1 軸, X_1 軸, Z_1 軸まわりに β ($-\pi \leq \beta < \pi$), α ($-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$), γ ($-\pi \leq \gamma < \pi$) 回転している。この時、点 P 及びベクトル E は回転行列を R_{1w} 、平行移動行列を T_{1w} とすると (2) の関係を持つ。

$$\langle P \rangle = \langle P \rangle R_{1w} T_{1w}, \quad \langle E \rangle = \langle E \rangle R_{1w} \quad (2)$$

ここで、

$$T_{1w} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{1w} = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma & 0 \\ -\cos \beta \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \cos \alpha \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma & 0 \\ \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 4 第2カメラ座標系

第2カメラ座標系は、観測すべきワールド座標軸やそのワールド位置座標が既知の点（参照点と呼ぶ）が撮像できるよう、回転中心を中心にして第1カメラ座標系を Y_1 まわりに ν 、 X_1 まわりに μ 回転したカメラ座標系である。これらの回転角は与えられるものとする（例えば自走ロボットでは、第1カメラ座標系とワールド座標系の間のおおよその関係は分かっており、 ν と μ を決めることができる）。焦点距離は不変である（つまり、 $f_2 = f_1$ ）。

カメラ座標系原点と回転中心との位置関係は不変なので回転変位ベクトルの大きさは同じである、つまり $t_1 = \langle t_x, t_y, t_z \rangle$ の時 $t_2 = \langle t_x, t_y, t_z \rangle$ （図3b参照）。よって第1カメラ座標系と第2カメラ座標系とは回転行列を R_{mn} とすると(3)の関係にある。

$$\langle P \rangle T_{12} = \langle P \rangle T_{12} R_{mn}, \quad \langle E \rangle = \langle E \rangle R_{mn} \quad (3)$$

$$\text{ここで、} \quad T_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{pmatrix} \quad R_{mn} = \begin{pmatrix} \cos \nu & 0 & -\sin \nu & 0 \\ \sin \mu \sin \nu & \cos \mu & \sin \mu \cos \nu & 0 \\ \cos \mu \sin \nu & -\sin \mu & \cos \mu \cos \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 5 第3カメラ座標系

第3カメラ座標系は、第2カメラ座標系の姿勢を保ちつつ、観測すべきワールド座標軸や参照点に焦点をあわせた座標系である。これらの軸と点の像は画像理解手法やオペレータの指示によって同定できるものとする。

焦点距離を変更することはレンズ中心の Z_c 方向への平行移動のみだから、第2カメラ座標系の原点から第3の原点へのベクトルを $t_{23} (=t_3 - t_2)$ とすると、 $t_{23} = \langle 0, 0, \Delta z \rangle = [0, 0, \Delta z]$ であり、2つの座標系の間には(4)の関係がある。

$$\langle\langle P \rangle\rangle = [P] T_{32}, \quad \langle\langle E \rangle\rangle = [E] \quad (4)$$

ここで、

$$T_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta z & 1 \end{pmatrix}$$

焦点距離は図4に示すように、 $f_3 = f_2 + \Delta z$ である。

2. 6 第4カメラ座標系

ワールド座標系の原点が Z_4 軸上に乗っているカメラ座標系を第4カメラ座標系と呼ぶ。第4カメラ座標系は、第3カメラ座標系を回転中心を中心にして、 Y_3 軸方向まわりに ψ 、 X_3 軸方向まわりに ϕ 回転して得られたとする。焦点距離は第3カメラ座標系と同じ ($f_4 = f_3$) である。

2.4と同様に、 $t_3 = [t_x', t_y', t_z']$ とすると、 $t_4 = [t_x', t_y', t_z']$ である。すると、 $t_3 = t_2 + t_{23}$ の両辺を (4) を用いて第2または第3カメラ座標表現で表すと、回転変位ベクトルの要素には以下の関係が成り立つことが分かる。

$$t_x' = t_x, \quad t_y' = t_y, \quad t_z' = t_z + \Delta z \quad (5)$$

第3と第4のカメラ座標系間には(6)の関係がある。

$$[P] T_{34} = [P] T_{34} R_{43}, \quad [E] = [E] R_{43} \quad (6)$$

ここで、

$$T_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x' & t_y' & t_z' & 1 \end{pmatrix} \quad R_{43} = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi \sin \psi & \cos \phi & \sin \phi \cos \psi & 0 \\ \cos \phi \sin \psi & -\sin \phi & \cos \phi \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

第4カメラ座標系とワールド座標系の間には(2)と同様の(7)の関係がある。

$$(P) = [P] R_{4w} T_{4w}, \quad (E) = [E] R_{4w} \quad (7)$$

ここで、 $T_4 = (T_x', T_y', T_z')$ とおく時、 T_{4w} は T_{1w} における T_x, T_y, T_z を T_x', T_y', T_z' に、 R_{4w} は R_{1w} における α, β, γ を α', β', γ' にそれぞれおきかえた行列である。

第1カメラ座標系の変数 $\alpha, \beta, \gamma, T_x, T_y, T_z, f_1$ (または f_{1x} か f_{1y}) が本稿で算出すべきパラメータであり、(1)~(7)の関係式を用いて解く。

3 カメラ固有パラメータ

レーザを用いて画像中心を正確に測定する方法もあるが[1]、図7に示すハードウェア構成により画像中心とアスペクト比を測定することができる[4]。

3. 1 画像中心

画像原点が既知とすると、図7に示すターゲット上の1つの参照点の画像座標値の比は(1)より、

$$v'/u' = (1/rat)Y/X \quad (8)$$

なる関係にあるから、 X, Y が一定であれば f や Z によらず一定であり画像原点を通る直線である。つまり、 f 又は Z を変更して測定した参照点の画像軌跡は画像原点を通るので、複数の参照点の画像上の軌跡の交点が画像原点である。

3. 2 アスペクト比

3. 2. 1 1枚の画像観測

カメラに正対させたターゲット上の2つの参照点を P, Q 、それらの像を p, q とし、これらのカメラ及び画像座標値は以下のごとく与えられるとする。

$$\begin{aligned} P &= [X_P, Y_P, Z], & Q &= [X_Q, Y_Q, Z] \\ p &= \{u_p', v_p'\}, & q &= \{u_q', v_q'\} \end{aligned} \quad (9)$$

この時の焦点距離を f とするとこれらの値には(1)より次ぎの関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} u_p' &= f_x X_P / Z, & v_p' &= f_y Y_P / Z \\ u_q' &= f_x X_Q / Z, & v_q' &= f_y Y_Q / Z \end{aligned} \quad (10)$$

(10)の上下の2式の差をとると、

$$\begin{aligned} u_p' - u_q' &= f_x (X_P - X_Q) / Z = f_x \Delta X / Z \\ v_p' - v_q' &= f_y (Y_P - Y_Q) / Z = f_y \Delta Y / Z \end{aligned} \quad (11)$$

(11)の2式の比をとり整理することにより、

$$rat = \Delta Y (u_p' - u_q') / \Delta X (v_p' - v_q') \quad (12)$$

3. 2. 2 2枚の画像観測

ターゲット上の2点を、焦点距離を変えないで2地点 ($i=1, 2$) で計測すると、前項と同様の計算法で f_x と f_y が以下の式 ($\Delta Z=Z_1-Z_2$) で算出できる[4]。

$$f_x = \frac{\Delta Z(u_{1p}' - u_{1q}') (u_{2p}' - u_{2q}')}{\Delta X(u_{2p}' - u_{2q}' + u_{1q}' - u_{1p}')} \\ f_y = \frac{\Delta Z(v_{1p}' - v_{1q}') (v_{2p}' - v_{2q}')}{\Delta Y(v_{2p}' - v_{2q}' + v_{1q}' - v_{1p}')} \quad (13)$$

(13)の2つの式の比をとることにより、

$$\text{rat} = \frac{\Delta Y(u_{1p}' - u_{1q}') (u_{2p}' - u_{2q}') (v_{2p}' - v_{2q}' + v_{1q}' - v_{1p}')}{\Delta X(v_{1p}' - v_{1q}') (v_{2p}' - v_{2q}') (u_{2p}' - u_{2q}' + u_{1q}' - u_{1p}')} \quad (14)$$

3. 2. 3 物理的情報からの算出

CCD 撮像素子は厳密に作成されており、メーカーに問えば物理的大きさや画像としての有効領域も教えてくれる。更に、A/D 変換器のサンプリングレートも教えてくれるので、論理的画素の横及び縦の大きさ s_x , s_y は計算することができ、その結果アスペクト比を算出することができる。

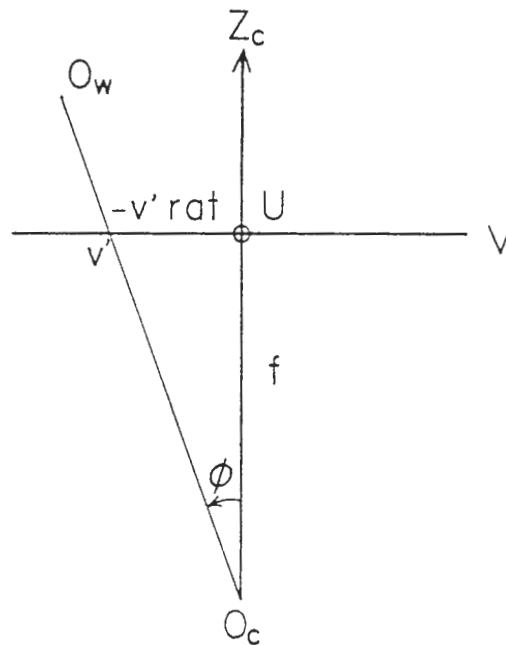


図5. 回転角 ϕ

4 回転角の算出

4. 1 第3画像による回転角の算出

画像上の直線 l_i とカメラ原点とでできる平面 Γ_i の法線ベクトル N_i は、 $l_i : a_i X + b_i Y + c_i = 0$ とカメラ座標表現されている時、 $N_i = [a_i, b_i, c_i/f_3]$ である。つまり、カメラ座標軸上の単位ベクトルを E_x, E_y, E_z とおくと、

$$N_i = a_i E_x + b_i E_y + c_i/f_3 E_z \quad (15)$$

l_i が L_i の像とすると、 L_i は Γ_i 上に存在するから、 $N_i \cdot L_i = 0$ 即ち、

$$a_i E_x \cdot L_i + b_i E_y \cdot L_i + c_i/f_3 E_z \cdot L_i = 0 \quad (16)$$

ここで、 L_i はワールド座標系の座標軸単位ベクトル ($i=1, 3$) とすると、 (L_i) は既知なので(16)より $(E_x), (E_y), (E_z)$ に関する3つの式が得られ、焦点距離 f_3 が既知ならば解くことができる[2],[3]。しかし本稿では変数としているので、第3画像からは $(E_x), (E_y), (E_z)$ について解くことはできない。

4. 2 第4画像による回転角の算出

第4画像では l_i ($i=1, 3$) は画像原点を通過しているので、(16)は(17)の如く簡略化される。

$$a_i E_x \cdot L_i + b_i E_y \cdot L_i = 0 \quad (17)$$

すると付録Aより係数 a_i, b_i には変数は含まれないので、 $E_x = (E_{x1}, E_{x2}, E_{x3})$, $E_y = (E_{y1}, E_{y2}, E_{y3})$, $E_z = (E_{z1}, E_{z2}, E_{z3})$ とおくと、 $L_1 = (1, 0, 0)$, $L_2 = (0, 1, 0)$, $L_3 = (0, 0, 1)$ を代入することによって3つの線型式(18)がえられる。

$$a_i E_{xi} + b_i E_{yi} = 0 \quad (18)$$

ところで、 $E_x = [1, 0, 0]$, $E_y = [0, 1, 0]$, $E_z = [0, 0, 1]$ だから R_{4w} の左上 3×3 行列を $(R_{4w})_{3 \times 3}$ と表すと(7)より

$$(R_{4w})_{3 \times 3} = ((E_x)^T, (E_y)^T, (E_z)^T)^T \quad (19)$$

ここで、肩付き T は転置を表す。つまり $(R_{4w})_{3 \times 3}$ の1, 2, 3行がそれぞれ $(E_x), (E_y), (E_z)$ である。

(18)と(19)より第4カメラ座標系のワールド座標系に対する回転角 α', β', γ' が一意に解ける(付録B)ので、 R_{4w} が一意に算出できる。すると、(2),(3),(4),(6)より $(E) = [E] R_{43} R_{m n} R_{1w}$ だから(7)との比較により、

$$R_{1w} = R_{mn}^{-1} R_{43}^{-1} R_{4w} \quad (20)$$

回転角 ψ, ϕ, ν, μ を代入することによって R_{1w} が一意に求まる。すると、 α の存在範囲が限定されているので、 R_{1w} の (3,2) 要素より α が一意に決定し、 β, γ も順次一意に決定できる。

4. 3 ψ と ϕ の決定

焦点距離 f_3 が既知ならば、注目点の像が原点にくるような仮想的な画像を生成するための回転角は、注目点の画像座標値から算出できるので ((21) に ϕ の算出法、また角度のとり方は異なるが文献[5])、本稿における第4カメラ座標系を用いなくても、つまり実際に回転しなくても仮想的に画像を生成することができ 4.2 の結果が使える (ただし (21) や [5] における回転中心は原点であり、仮想画像座標系の原点は 0_3 と一致しているので、 $t_3 = t_4 = 0$ である)。更に 4.1 で述べたように、 f_3 が既知ならば仮想画像を生成するまでもなく (16) を解くことができ、いずれにしても ψ と ϕ の回転は不要である。しかし本稿では未知としているので、回転せざるをえない。

オペレータが介在できる場合には、ワールド座標系原点 0_w の像が V 軸上にくるまで Y_3 軸まわりにカメラを回転させる。次いで同様の作業を X_3 軸まわりで行なってワールド座標系原点を画像原点に一致させ、この時のそれぞれの回転角 ψ, ϕ を計測すればよい。

オペレータが介在できない場合には、次のようにして算出する。第3カメラ座標系からカメラを Y_3 軸まわりに $\Delta\phi_a, \Delta\phi_b$ と2度回転して撮像したそれぞれの画像における 0_w の像の画像座標値を計測すれば、算出すべき角度 (0_w が V 軸上にくるまでの角度) ϕ は算出できる (付録C)。 ψ についても同様に算出できる (付録D) が、 ψ と同時に f_3 も算出できるので、 ψ 回転した画像における 0_w の画像座標値を $\{0, v'\}$ とすると、図5に示すように以下のごとく簡単に計算できる (ただし回転中心はカメラ座標系原点)。

$$\phi = \tan^{-1} (-v'/f_{3v}) \quad (21)$$

f_3 が算出できると、4.1 で述べたように第4画像を生成するまでもなく第3画像を用いて最終目的のカメラ回転角は算出できるが、他の手段で ψ を求めたために f_3 が未知の場合を考慮して、本稿では第4画像を生成することとする。

5 平行移動と焦点距離の算出

5.1 第4カメラ座標系の平行移動と焦点距離

第4画像内の参照点像を利用して、平行移動 T_4 を算出する。(7)の点に関する式より、

$$[P] = (P) T_{4w}^{-1} R_{4w}^{-1} \quad (22)$$

(T_4) を用いて右辺の行列を具体的に示すと、

$$T_{4w}^{-1} R_{4w}^{-1} = \begin{pmatrix} r_1^T & r_2^T & r_3^T & 0^T \\ -T_4 \cdot r_1 & -T_4 \cdot r_2 & -T_4 \cdot r_3 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで、 r_i は $(R_{4w}^{-1})_{3 \times 3}$ の i 列を要素とするベクトル、 0 はゼロベクトル、肩付き T は転置を表す。

参照点 P の位置ベクトル X のワールド表現 (X) に対して、(22)と(1)より P の第4画像座標値 $\{u_4', v_4'\}$ に関する以下の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} u_4' &= f_{4x} X_c / Z_c \\ v_4' &= f_{4y} Y_c / Z_c = (f_{4x} / \text{rat}) Y_c / Z_c \end{aligned}$$

$u_4 = u_4'$, $v_4 = v_4' \text{rat}$ とおいて上式を書き改めると、

$$\begin{aligned} u_4 &= f_{4x} (X \cdot r_1 - T_4 \cdot r_1) / (X \cdot r_3 - T_4 \cdot r_3) \\ v_4 &= f_{4x} (X \cdot r_2 - T_4 \cdot r_2) / (X \cdot r_3 - T_4 \cdot r_3) \end{aligned} \quad (23)$$

参照点としてワールド座標系の原点を採用すると、 $X = (0, 0, 0)$, $u_4 = 0$, $v_4 = 0$ だから

$$T_4 \cdot r_1 = 0, \quad T_4 \cdot r_2 = 0$$

であり、原点以外の参照点に対して (23) より、

$$\sqrt{u_4^2 + v_4^2} = f_{4x} (\sqrt{X_c^2 + Y_c^2}) / (X \cdot r_3 - T_4 \cdot r_3) \quad (24)$$

任意の参照点に対して $X_c = X \cdot r_1$ と $Y_c = X \cdot r_2$ は算出できるから、(24) は f_{4x} と $T_4 \cdot r_3$ に関する線型式であり、原点以外の2点の対応より算出できる。その結果、(T_4) $R_{4w}^{-1} = (T_4 \cdot r_1, T_4 \cdot r_2, T_4 \cdot r_3, 1)$ より

$$(T_x', T_y', T_z', 1) = (0, 0, T_4 \cdot r_3, 1) R_{4w} \quad (25)$$

5. 2 第3カメラ座標系の平行移動と焦点距離

第3カメラ座標系の平行移動 T_3 は図3 b より、

$$T_3 = T_4 + (t_3 - t_4) \quad (26)$$

よって (t_3) , (t_4) を算出すればよい。(6) より

$$[P] = [P] T_{34} R_{43} T_{34}^{-1} \quad (27)$$

(27) の行列を $[t_3]$ を用いて具体的に示すと、

$$T_{34} R_{43} T_{34}^{-1} = \begin{pmatrix} r_1^T & r_2^T & r_3^T & 0^T \\ t_3 \cdot (r_1 - i_1) & t_3 \cdot (r_2 - i_2) & t_3 \cdot (r_3 - i_3) & 1 \end{pmatrix}$$

ここで、 r_i は $(R_{43})_{3 \times 3}$ の、 i_i は 3×3 の単位行列 I の第 i 列を要素とするベクトルである。

参照点 P の第4カメラ座標表現を $[X]$ 、第3画像座標値を $\{u_3', v_3'\}$ とすると、(23) と同様に

$$\begin{aligned} u_3 &= f_{3x} (X \cdot r_1 - t_3 \cdot (i_1 - r_1)) / (X \cdot r_3 - t_3 \cdot (i_3 - r_3)) \\ v_3 &= f_{3x} (X \cdot r_2 - t_3 \cdot (i_2 - r_2)) / (X \cdot r_3 - t_3 \cdot (i_3 - r_3)) \end{aligned} \quad (28)$$

が得られるから2つの式の比をとると、

$$u_3/v_3 = (X \cdot r_1 - t_3 \cdot (i_1 - r_1)) / (X \cdot r_2 - t_3 \cdot (i_2 - r_2)) \quad (29)$$

ところで (22) によって $[X]$ は計算できるので、上式は $t_3 \cdot (i_1 - r_1)$, $t_3 \cdot (i_2 - r_2)$ に関する線型式であり、2点の対応により解ける。この後 f_{3x} と $t_3 \cdot (i_3 - r_3)$ は (24) と同様の式で算出できる ($f_{3x} = f_{4x}$ を利用すれば、(28) のどちらかの式より $t_3 \cdot (i_3 - r_3)$ が算出できる)。すると、5.1 と同様にして $t_3 = [t_x', t_y', t_z']$ が算出でき、結果として $t_4 = [t_x', t_y', t_z']$ が算出できる。これらのワールド表現は (6), (7) より以下のように算出できる。

$$(t_4) = [t_4] R_{4w} \quad (30)$$

$$(t_3) = [t_3] R_{43}^{-1} R_{4w} \quad (31)$$

5. 3 第2カメラ座標系の平行移動と焦点距離

第2カメラ座標系の平行移動 T_2 は図4 より、

$$T_2 = T_3 - t_{23} \quad (32)$$

よって、 (t_{23}) を算出すればよい。ここで Δz は計測されているので $[t_{23}]$ は既知であり、(31) による (t_3) と同様にして計算できる。

焦点距離については、 $f_2 = f_3 - \Delta z$ より容易に算出できる。

5. 4 第1カメラ座標系の平行移動と焦点距離

第1カメラ座標系の平行移動 T_1 は図3 b より、

$$T_1 = T_2 + (t_1 - t_2) \quad (33)$$

よって (t_1) , (t_2) を算出すればよい。ところで $t_2 = t_3 - t_{23}$ であり、右辺のワールド表現は既に算出されているので、 (t_2) は計算できる。 t_2 の第2カメラ座標表現 $\langle t_2 \rangle$ は、(4), (6), (7) より導出される以下の式

$$\langle E \rangle = (E) R_{4w}^{-1} R_{43} \quad (34)$$

を用いれば計算できるので、要素の大きさが同じである t_1 の第1カメラ座標表現 $\langle t_1 \rangle$ が定まる。よって(2) を用いて (t_1) を算出することができる。

第1カメラ座標系の焦点距離は、2.4 で述べたように第2のそれと同じである。

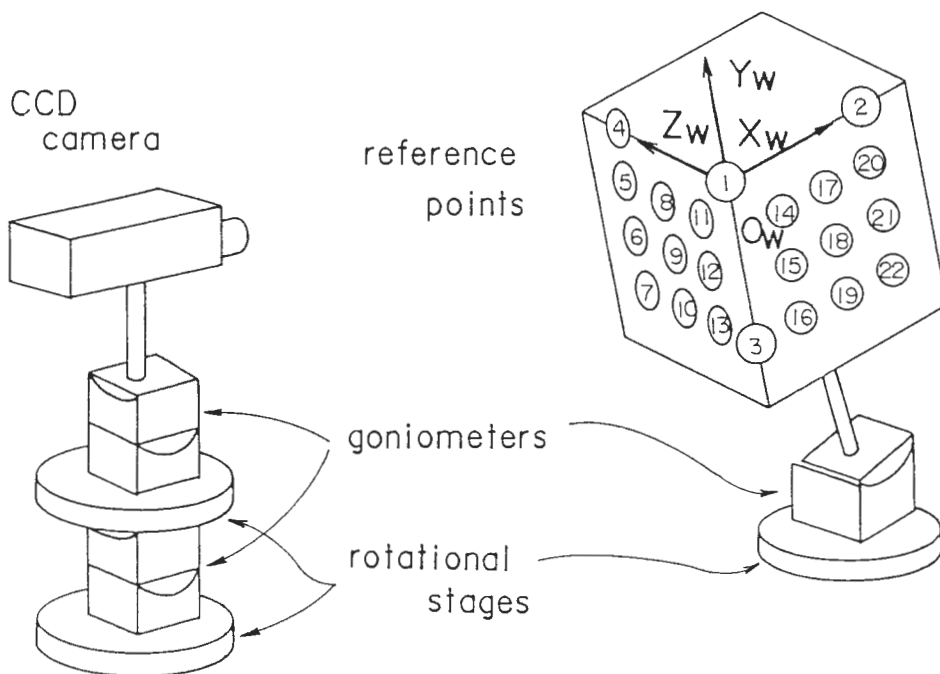


図6. 実験システム構成1

6 実験結果

実験は、カメラは三洋社製の 2/3型 CCD 個体撮像素子使用の VC-D300、外部同期は ADS 社製 PIP-4000 によって与えられるシステム構成の OGIS 社製 RFX・IV を用いて行なった。画像の縦横サイズは、480 X 512 である。

カメラ固有パラメータの計測には図 7 の構成を用い、その他の動的パラメータの計測には図 6 に示す構成を用いた。実験風景を図 8、9 に示す。

6. 1 画像中心

図 7 に示すターゲット上の 8 点をレール上異なる 3 地点で撮影した。各点の軌跡を直線近似し、2 本ずつの直線の交点を算出し、その平均を画像中心とした。各画像で領域の中点を抽出し、それらの 3 枚を合成した画像を図 10 に示す。撮像面の中心より若干左上に存在する画像中心に収束している様子が分かる。8 本のうちの 3 本の直線の交点を以下に示す。値は画像の左上隅が (1,1) である。

交点 1 (u_1', v_1') : 282.6840, 219.8456

交点 2 (u_2', v_2') : 282.3361, 219.4593

交点 3 (u_3', v_3') : 282.0276, 219.8225

平均 (u_c', v_c') : 282.3459, 219.7091

(ここで実験では、支柱をはめるネジ穴がカメラ本体の上面にあるので正規の使用とは天地逆にしており、正規の中心は ($512-u_c', 480-v_c'$) である。)

6. 2 アスペクト比

6. 2. 1 1 枚の画像観測からの算出

3 地点において撮像した 2 点の観測値から、(12)により以下の結果を得た。

画像 1 : 0.939849 画像 2 : 0.939991 画像 3 : 0.940780

平均 : 0.940206

6. 2. 2 2 枚の画像観測からの算出

更にこれらの 3 枚の画像の 2 枚ずつの組合せに対して、(13)により焦点距離を算出し以下の結果を得た。

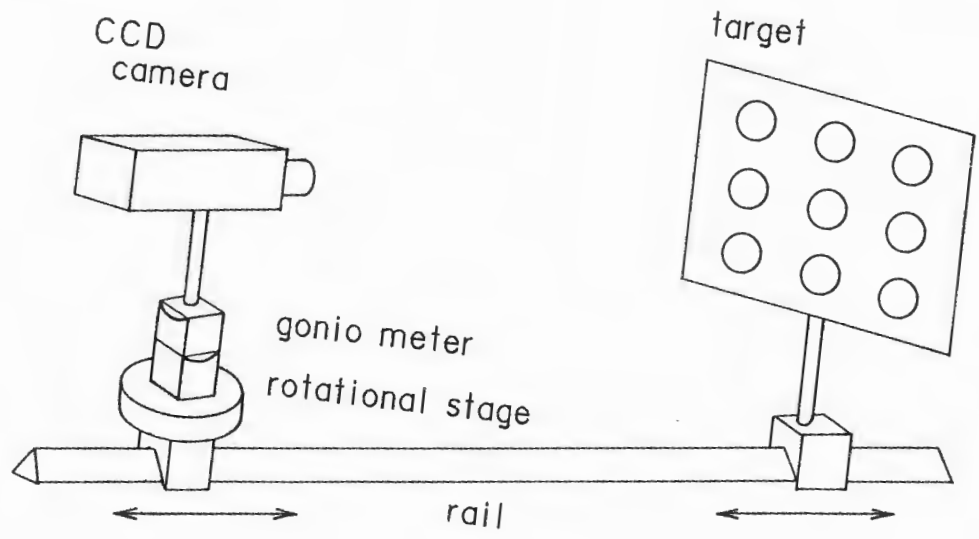
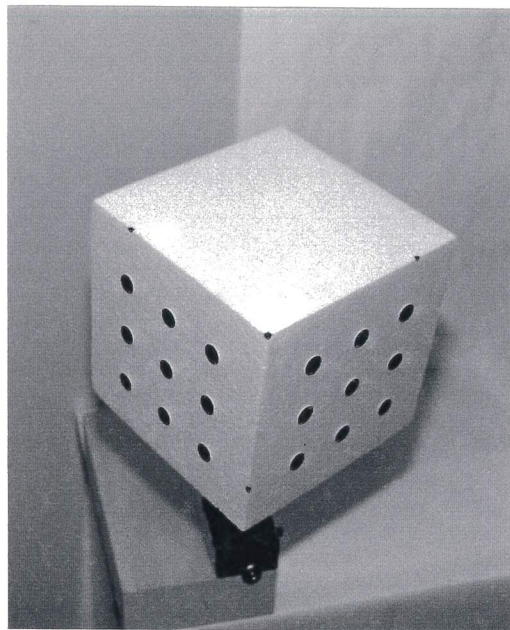


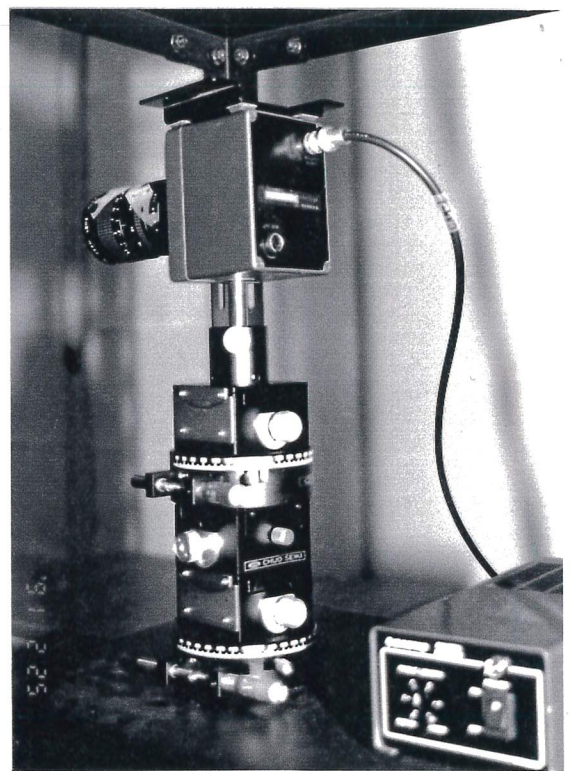
図 7. 実験システム構成 2



図 8. 実験風景 1



a. 測定物体



b. カメラ

図9. 実験風景2

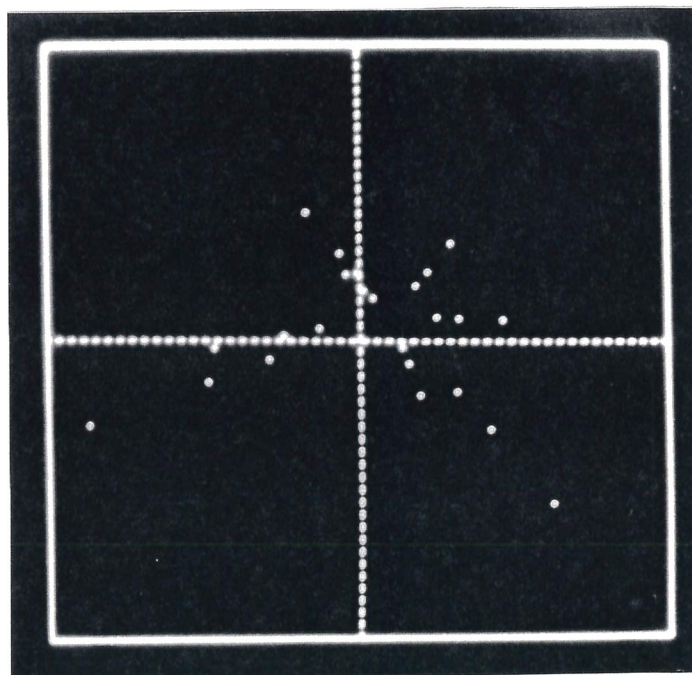


図10. 画像中心

画像 1 & 2 : $f_x = 3504.285$, $f_y = 3732.457$

画像 1 & 3 : $f_x = 3507.182$, $f_y = 3741.998$

画像 2 & 3 : $f_x = 3509.853$, $f_y = 3750.823$

平均 : $f_x = 3507.107$, $f_y = 3741.759$

平均値を用いたアスペクト比は、

$$f_x/f_y = 0.937289$$

であり、1枚の画像から算出された結果とよく一致している。以下の実験では $rat=0.94$ としている。

6. 2. 3 物理的情報からの算出

物理的1素子は(以下数値は横 x 縦)が $16\mu\text{m} \times 13\mu\text{m}$ であり、 552×496 個正確に並べられている。即ち撮像面は、 $8.832\text{mm} \times 6.597\text{mm}$ の大きさを持っている。

三洋の標準使用では、撮像面を水平同期信号が $64\mu\text{sec}$ 、垂直には 10.74MHz のサンプリングで 552 個 A/D 変換している*。従って $64\mu\text{sec}$ のうち $51.40\mu\text{sec}$ を使用して 552 回サンプリングしている。有効領域は 552×485 である。

我々のシステムでは ADS 社の変換器を使用しており、 $64\mu\text{sec}$ のうち $41.80\mu\text{sec}$ の間を垂直同期 12.25MHz で 512 回サンプリングしている**。有効領域は 512×480 である。従って、横の論理的大きさは、

$$s_x = 8.832 \times (41.80/51.40) / 512 = 0.014\text{mm}$$

故に、アスペクト比は

$$rat = s_y/s_x = 13.3/14.0 = 0.95$$

6. 3 回転・平行移動の算出

本稿における展開の本質的な部分を確認するために、第1、第2、第3カメラ座標系が一致している状況を想定し実験を行なった。つまり、(3),(4)において

(注) 物理的情報は以下の方々より得た。

・ 三洋 VLSI エンジニアリング 古沢氏 TEL: 058-464-4897

** ADS 社 技術部 とかね氏 TEL: 06-613-5881

$$T_{12} = R_{mn} = T_{32} = I$$

とし、第4及び第3カメラ座標系のワールド座標系に対する回転と平行移動を求める実験を行なった。

実験に際してエッジや参照点（連結領域の中心）抽出の誤差を考慮し、図9 bに示すように市販の発砲スチロールの20cm立方体を使用した。立方体のエッジ（参照点の2組から成る3本のベクトル $(1,2), (3,1), (1,4)$ ）をワールド座標軸として回転を算出し、22個の参照点のうち2つを用いて平行移動を算出した。

第3から第4カメラ座標系への回転は、モニタを見ながら手動で行なった。従って第4画像におけるワールド原点 0_w の座標値 $\{u_0', v_0'\}$ は $\{0,0\}$ ではないので、第4画像における参照点の観測値 $\{u', v'\}$ はあたかも $\{u'-u_0', v'-v_0'\}$ と観測されたとして回転の算出を行なっている。

算出された回転角、平行移動と焦点距離の値そのものの評価は難しいので、これらの値を使用して計算した参照点の画像座標値と計測された座標値との差（単位は画素）をまとめた結果を以下に示し、相対的評価とする。以下における平均誤差は、誤差画素数の絶対値の平均である（即ちずれの平均である）。更にこの実験を複数の参照点の組のそれぞれに対して行い、平均ずれ誤差の平均を算出した。実験は2回行なった。これらのまとめのための計算結果を表として添付しておくので、参照されたい。以下に表を簡単に説明しておく。

- 1) 表1と7には、参照点のワールド座標値とこれらの点の画像4と画像3における画像座標値を示す。
- 2) 表2と8には、第4画像による回転角の8意解とそれぞれによって計算されたワールド座標軸の像ベクトルと画像から計測された像ベクトル、一意に決定された第4及び第3カメラ座標系の回転角を示す。
- 3) 表3と9には、指定された参照点の2つ組を用いて算出された第4カメラ座標系の平行移動と焦点距離、これらの値を用いて計算された参照点の画像座標値と計測されたそれを示す。
- 4) 表4と10には、参照点毎のずれ及び全参照点の平均ずれを示す。
- 5) 表5と11には、3)と同様に第3カメラ座標系の値を示す。
- 6) 表6と12には、複数の参照点の組を採用し、それぞれに対するずれ誤差を算出した結果の参照点毎の平均と、更にそれらの全参照点の平均を示す。

実験 1 :

ファイル名 : CAMR58.DAT (第 4 画像) & CAMR51.DAT (第 3 画像)

$\psi = -1.25'$, $\phi = -1.50'$, 参照点の組 (14, 17)

$\{u_0', v_0'\} = \{-4.103, 3.331\}$ (表 1 の Image4 参照点 1) に対して

1) 第 4 カメラ座標系

$\alpha' = 10.14^\circ$, $\beta' = 39.85^\circ$, $\gamma' = 1.29^\circ$ (表 2)

$T_4 = (-1613.474, 448.988, -1932.000)$ (表 3)

$f_{4x} = 4150.030$ (表 3)

最大誤差 $\Delta u = -4.746$ (参照点 4), $\Delta v = -7.219$ (参照点 3)

最小誤差 $\{0.0, 0.0\}$ (参照点 14 & 17) (表 3)

平均ずれ誤差 $\{1.350, 2.900\}$ (全参照点) (表 4)

2) 第 3 カメラ座標系

$\alpha = 11.94^\circ$, $\beta = 41.34^\circ$, $\gamma = 1.60^\circ$ (表 2)

$T_3 = (-1613.010, 448.851, -1931.439)$ (表 5)

$f_{3x} = 3441.013$ (表 5)

最大誤差 $\Delta u = -3.482$ (参照点 4), $\Delta v = -7.985$ (参照点 3)

最小誤差 $\{0.0, 0.0\}$ (参照点 14 & 17) (表 5)

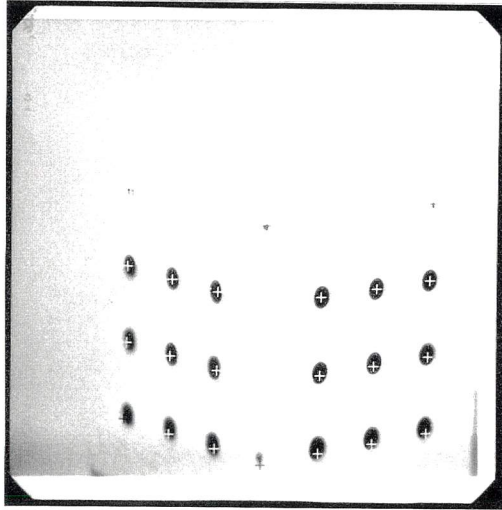
平均ずれ誤差 $\{0.969, 2.484\}$ (全参照点) (表 4)

参照点の組 : (3, 4), (4, 8), (4, 11), (4, 12), (8, 12), (8, 14), (8, 17),
(11, 17), (14, 17) の 9 組における全参照点のずれ平均は

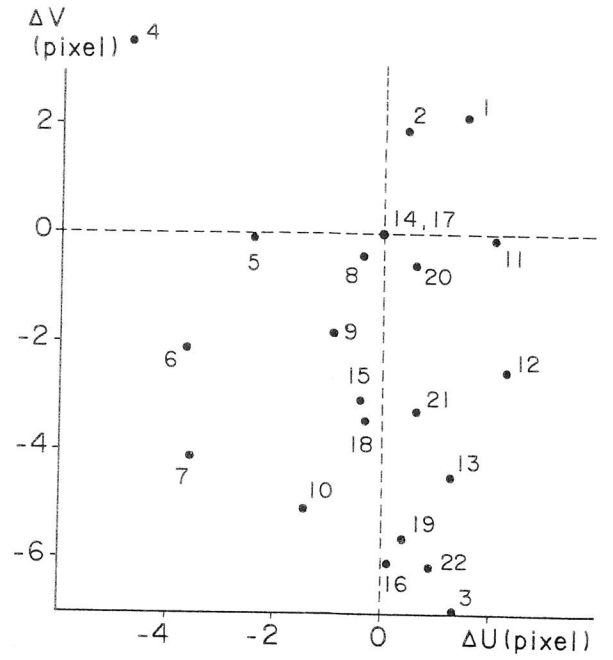
第 4 画像における平均ずれ誤差 $\{3.065, 2.301\}$ (表 6)

第 3 画像における平均ずれ誤差 $\{2.297, 2.361\}$ (表 6)

図 1 1 a に第 4 画像における参照点の計算値を (+印) 原画像に重ねて示し、
同図 b に計測値との差を示す。図 1 2 に第 3 画像のそれらを示す。

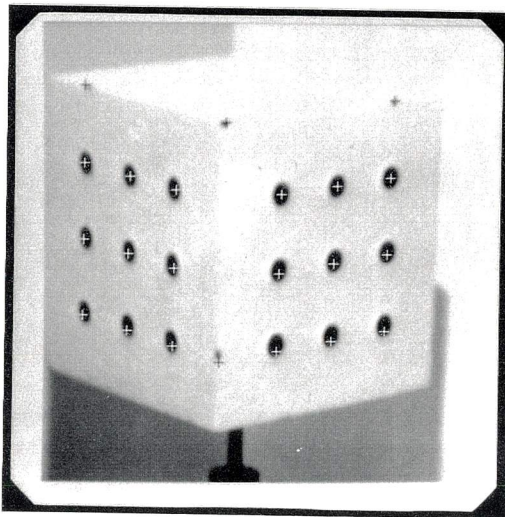


a. 画像表示

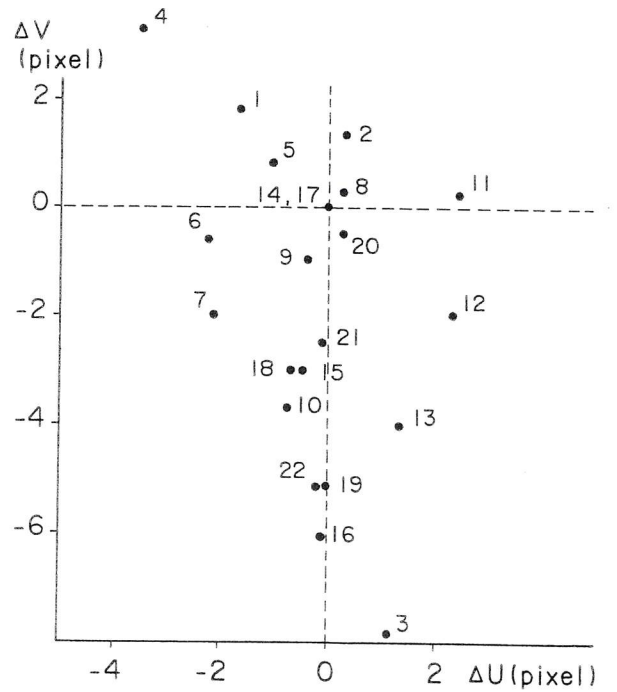


b. 計測値との差

図 1 1. 参照点の計算値 (実験 1, 第 4 画像)



a. 画像表示



b. 計測値との差

図 1 2. 参照点の計算値 (実験 1, 第 3 画像)

実験 2 :

ファイル名: CAMR32.DAT (第 4 画像) & CAMR31.DAT (第 3 画像)

$\psi = -1.20'$, $\phi = -1.50'$, 参照点の組 (4, 14)

$\{u_a', v_a'\} = \{-3.758, 4.561\}$ (表 7 の Image4 参照点 1) に対して

1) 第 4 カメラ座標系

$\alpha' = 10.24^\circ$, $\beta' = 39.31^\circ$, $\gamma' = 0.53^\circ$ (表 8)

$T_4 = (-1408.029, 401.650, -1718.802)$ (表 9)

$f_{4x} = 3608.869$ (表 9)

最大誤差 $\Delta u = 2.358$ (参照点 5), $\Delta v = -4.070$ (参照点 3)

最小誤差 $\{0.0, 0.0\}$ (参照点 4 & 14) (表 9)

平均ずれ誤差 $\{1.276, 1.501\}$ (全参照点) (表 10)

2) 第 3 カメラ座標系

$\alpha = 12.06^\circ$, $\beta = 40.69^\circ$, $\gamma = 0.82^\circ$ (表 8)

$T_3 = (-1408.442, 401.791, -1719.288)$ (表 11)

$f_{3x} = 4264.787$ (表 11)

最大誤差 $\Delta u = 2.727$ (参照点 13), $\Delta v = -3.592$ (参照点 3)

最小誤差 $\{0.0, 0.0\}$ (参照点 4 & 14) (表 11)

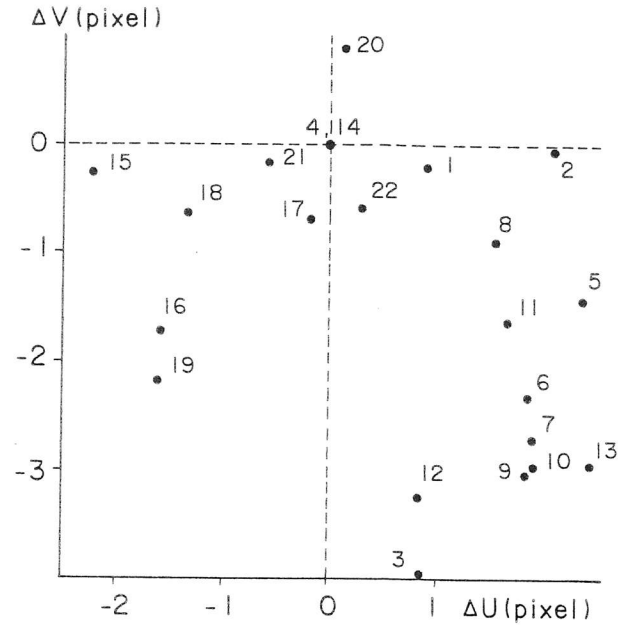
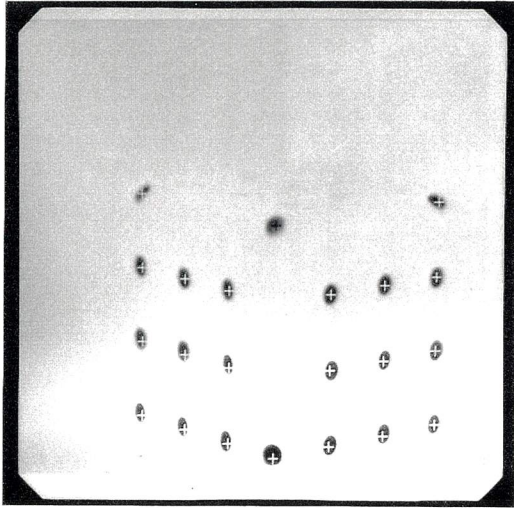
平均ずれ誤差 $\{1.375, 1.583\}$ (全参照点) (表 10)

参照点の組: (2, 4), (3, 4), (3, 8), (3, 12), (4, 8), (4, 11), (4, 12),
(4, 14) の 8 組における全参照点のずれ平均

第 4 画像における平均ずれ誤差 $\{1.840, 1.275\}$ (表 12)

第 3 画像における平均ずれ誤差 $\{2.006, 1.251\}$ (表 12)

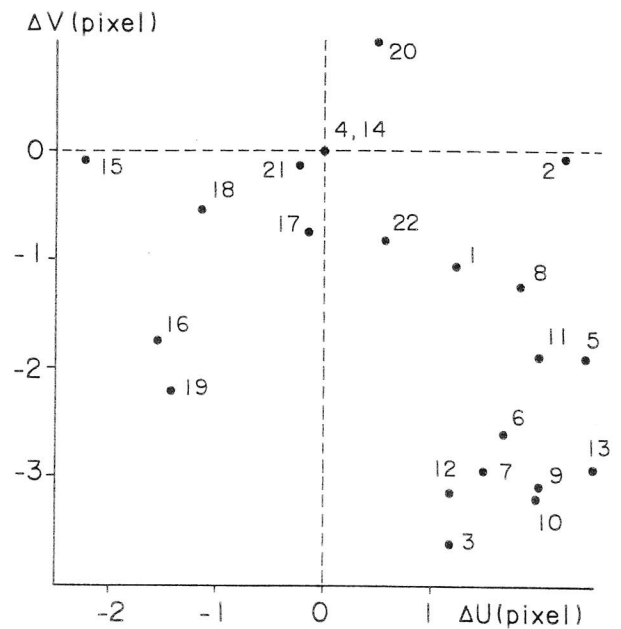
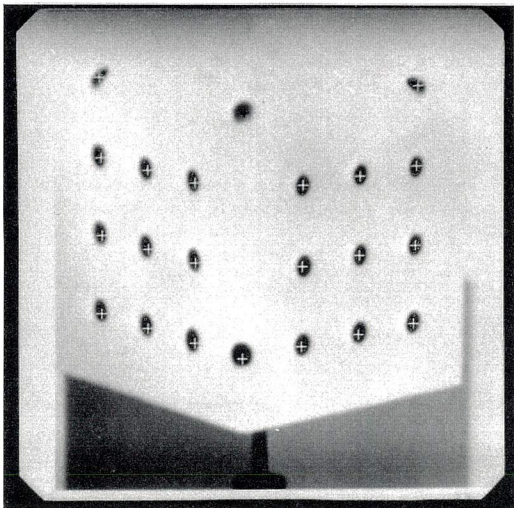
図 13 a に第 4 画像における参照点の計算値を (+印) 原画像に重ねて示し、
同図 b に計測値との差を示す。図 14 に第 3 画像のそれらを示す。



a. 画像表示

b. 計測値との差

図 13. 参照点の計算値 (実験 2, 第 4 画像)



a. 画像表示

b. 計測値との差

図 14. 参照点の計算値 (実験 2, 第 3 画像)

7 誤差解析と対策

前章に述べた実験1では、平行移動及び焦点距離の算出に際し、参照点の2組として2,3,4,8,11,12,14,15,17のあらゆる組合せを採用し、表13に示す結果を得た。表において左の2つの整数は参照点の組を、上段は第4カメラ座標系の平行移動と焦点距離を、下段は第3カメラ座標系のそれらを示している。

7.1 焦点距離

表13において、2つ組の中には焦点距離として負の結果が得られているものがある。まずこの原因について解析する。

f_{4x} は2つの参照点 P_1 と P_2 に対する(24)で算出される。これらの位置ベクトルを X_1, X_2 とし、 rat 倍した画像座標値を $\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\}$ とすると、

$$\sqrt{u_1^2 + v_1^2} = f_{4x} (\sqrt{X_{c1}^2 + Y_{c1}^2}) / (X_1 \cdot r_3 - T_4 \cdot r_3) \quad (35)$$

$$\sqrt{u_2^2 + v_2^2} = f_{4x} (\sqrt{X_{c2}^2 + Y_{c2}^2}) / (X_2 \cdot r_3 - T_4 \cdot r_3) \quad (36)$$

2つの線型式を解くと、

$$f_{4x} = \frac{\sqrt{u_1^2 + v_1^2} \sqrt{u_2^2 + v_2^2} (X_1 \cdot r_3 - X_2 \cdot r_3)}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2} \sqrt{X_{c1}^2 + Y_{c1}^2} - \sqrt{u_1^2 + v_1^2} \sqrt{X_{c2}^2 + Y_{c2}^2}} \quad (37)$$

ところで、参照点2と3の組合せに対して実験では

$$\sqrt{u_1^2 + v_1^2} = 183.2152, \quad \sqrt{u_2^2 + v_2^2} = 228.4266$$

であり、(37)の分母は

$$27052.8481 - 26589.4712 = 463.3769$$

となる。その結果、次のように負になってしまう(表13の1行目)。

$$f_{4x} = -6159.0865$$

ここで debugger を用いて $\sqrt{u_1^2 + v_1^2} = 175.0$ に変更(参照点2の方向ベクトルは同じでその長さだけを短く)し他はすべて同じ値を用いると、(37)の分母は

$$25839.8290 - 26589.4712 = -749.6422$$

となり、その結果は次のように正の値になる(表15)。これは(37)の分母が0に近い値であり、 f_{4x} の算出は計測誤差に非常に弱いことを示している。

$$f_{4x} = 3636.4138$$

これに対しては焦点距離は必ず正なので、ある参照点の組に対して負が得られ

たならば、参照点の計測誤差が大と判定しこの結果を除外し、別の参照点の組を探索することができる。

更に、第4と第3カメラ座標系の焦点距離がともに正の場合でも、これら2つの座標系では焦点距離を変更していないので、本来ならば等しい値になるはずである。そこで、 f_{4x} と f_{3x} の比が1に近いものを採用することにする。

7. 2 平行移動の大きさ

我々のシステムは移動ロボットを想定しており、ワールド座標軸は部屋の隅や建物の角なので、平行移動はある程度以上の距離にあると仮定してよい。そこで、算出された結果に対して条件を設けて、この条件からはずれる参照点の組を除外することにする。

7. 3 適切な参照点の組

焦点距離がともに正でありかつその比（大／小）が1.5以内、Z方向の移動が500mm以上の条件を満たす参照点の組を採用することになると、表13のあらゆる組合せのうち、表14に示す組が採用された。この組が、実験1における全参照点のずれ誤差の平均を算出した9個である。実験2の8個の組も同様にして採用されたものである。

7. 4 評価

表14から分かるように、1組の参照点から算出された平行移動と焦点距離は、第4と第3カメラ座標系で近似した結果が得られている。これは、焦点距離についてはその比が1.5以下に押えたことによっており、平行移動については回転変位ベクトルが小さいことを考えると望ましい結果が得られていることが分かる。

しかし、異なる参照点の組による結果の間には、大きな差異が生じている。それにも拘らず各組による参照点の画像上の位置は、計算値と計測値とでは2画素程度であったことを考えると、算出された平行移動と焦点距離の値そのものの信頼性は低いですが、これらを1まとまりの解として扱う限りは情景理解などにおけるカメラパラメータとして使用できることを示している。

8 あとがき

移動ロボットに搭載されたカメラのキャリブレーション手法について述べた。動的パラメータの算出には専用の物体でなく、部屋の隅や建物の角を利用する。回転を算出するための直線データは1組しかないため、専用の物体を用いて多数の直線を利用できる手法 [1] (1画素以下の精度がえられている) に比べると精度は落ちるが平均して2画素程度であり、実用には充分耐えうると思われる。

謝辞

本研究を実施するに際し、有益な討論と貴重な助言を頂いた大阪大学の八木康史助手と IBM東京基礎研究所の越後富夫氏、実験に協力して頂いた銚子SCCの山上雅之氏、機会を与えて頂いた当研究所の淀川英司社長と上野圭一室長並びに光学実験に助言を頂いた加藤隆仁主任研究員の方々に感謝します。

参考文献

- [1] T. Echigo, "A camera calibration technique using three sets of parallel lines," *Machine Vision and Applications*, Vol.3, No.3, pp.159-167, 1990.
- [2] L.L. Wang and W.H. Tsai, "Computing camera parameters using vanishing-line information from a rectangular parallelepiped," *ibid*, pp.129-141, 1990.
- [3] 笠井, 他, "ポジションセンサを用いた三次元運動計測システム," *計測自動制御*, 19-12, pp.997-1003, 1983.
- [4] 八木, 深田, "三次元物体認識のためのカメラキャリブレーション," *三菱電機研究報告*, ORR86-146, pp.1-25, 1986.
- [5] T. Shkunaga and H. Kaneko, "Perspective angle transform: principle of shape from angles," *Computer Vision*, 3, pp.239-254, 1989.

INPUT DATA FILE = CAMR51.DAT

INPUT DATA FILE = CAMR58.DAT

IMAGE COORDINATES	IMAGE4 (U & V)		IMAGE3 (U & V)	
1	-4.102631	3.330734	-92.431595	115.394821
2	177.720795	27.309113	89.835938	139.527283
3	-9.257660	-239.614410	-97.285889	-128.250885
4	-146.527710	38.890930	-235.845886	151.125778
5	-150.055969	-38.589203	-239.305298	72.413452
6	-150.114792	-117.290894	-239.086411	-6.669907
7	-151.385193	-195.496124	-240.172241	-85.018433
8	-104.123215	-51.460938	-193.034317	59.587448
9	-104.980743	-131.739014	-193.548264	-20.865295
10	-105.949814	-209.808533	-194.363907	-99.224823
11	-57.275299	-65.306580	-145.998703	45.887146
12	-59.030930	-145.708221	-147.399292	-34.967453
13	-59.620880	-226.101593	-147.808578	-115.207306
14	57.141998	-70.087860	-30.720245	41.273209
15	55.565521	-150.154816	-32.228546	-38.952240
16	53.028412	-229.608032	-34.670563	-118.342834
17	117.197723	-61.190216	29.347870	50.378479
18	115.350891	-139.929596	27.611450	-28.642899
19	112.428101	-219.303284	24.834961	-107.876007
20	175.141296	-51.909485	87.433960	59.727676
21	172.826630	-130.476196	85.200043	-19.065170
22	170.272522	-208.320496	82.750122	-96.818909

REFER POINTS(X,Y,Z)

1	0.000	0.000	0.000	
2	150.000	0.000	0.000	
3	0.000	-150.000	0.000	
4	0.000	0.000	150.000	
5	0.000	-50.000	150.000	
6	0.000	-100.000	150.000	
7	0.000	-150.000	150.000	
8	0.000	-50.000	100.000	
9	0.000	-100.000	100.000	
10	0.000	-150.000	100.000	
11	0.000	-50.000	50.000	
12	0.000	-100.000	50.000	
13	0.000	-150.000	50.000	
14	50.000	-50.000	0.000	
15	50.000	-100.000	0.000	
16	50.000	-150.000	0.000	
17	100.000	-50.000	0.000	
18	100.000	-100.000	0.000	$\psi = -1.25'$
19	100.000	-150.000	0.000	
20	150.000	-50.000	0.000	$\phi = -1.50'$
21	150.000	-100.000	0.000	
22	150.000	-150.000	0.000	

表 1. 参照点の座標値 (実験 1)

ALPHA	10.142	10.142	-10.142	-10.142	10.142	10.142	-10.142	-10.142
BEHTA	39.846	-140.154	-39.846	140.154	39.846	-140.154	-39.846	140.154
GAMMA	1.293	1.293	1.293	1.293	-178.707	-178.707	-178.707	-178.707

IMAGE UNIT VECTORS(U,V)

0.992404	0.123023
0.022568	0.999745
-0.973547	0.228487

AXIS UNIT VECTORS(X,Y)

0.770123	0.095468
0.022215	0.984124
-0.637508	0.149621

PROJECTED UNIT VECTORS

0.992404	0.123023
0.022568	0.999745
-0.973547	0.228487

-0.770123	-0.095468
0.022215	0.984124
0.637508	-0.149621

-0.992404	-0.123023
0.022568	0.999745
0.973547	-0.228487

0.770123	0.095468
0.022215	0.984124
0.637508	-0.149621

0.992404	0.123023
0.022568	0.999745
0.973547	-0.228487

-0.770123	-0.095468
0.022215	0.984124
-0.637508	0.149621

-0.992404	-0.123023
0.022568	0.999745
-0.973547	0.228487

-0.770123	-0.095468
-0.022215	-0.984124
0.637508	-0.149621

-0.992404	-0.123023
-0.022568	-0.999745
0.973547	-0.228487

0.770123	0.095468
-0.022215	-0.984124
-0.637508	0.149621

0.992404	0.123023
-0.022568	-0.999745
-0.973547	0.228487

-0.770123	-0.095468
-0.022215	-0.984124
-0.637508	0.149621

-0.992404	-0.123023
-0.022568	-0.999745
-0.973547	0.228487

0.770123	0.095468
-0.022215	-0.984124
0.637508	-0.149621

0.992404	0.123023
-0.022568	-0.999745
0.973547	-0.228487

SOLUTION 1TH ALPHA4,BEHTA4,GAMMA4 10.141976 39.845717 1.293135

SOLUTION ANGLE, ALPHA3,BEHTA3,GAMMA3 11.938960 41.335626 1.601175

表2. 回転角の算出(実験1)

REFERENCE IS ITH \$ JIH 14 17

4TH IMAGE ANALYSIS

GOOD, BECAUSE $F > 0$ IS OBTAINED AS BELOW
4TH ROW OF RT MATRIX FOR T4

VECTOR -0.933 -1.242 -2556.855

TRANSLATION FROM THE WORLD & FX

-1613.474 448.988 -1932.000 4150.030

IMAGE COORDINATES

	CALICULATED(U,V)		MEASURED(U,V)		DIFFERENCES	
1	-2.588	5.476	-4.103	3.331	1.514	2.145
2	178.166	29.244	177.721	27.309	0.445	1.935
3	-7.957	-246.833	-9.258	-239.614	1.301	-7.219
4	-151.274	42.492	-146.528	38.891	-4.746	3.601
5	-152.511	-38.726	-150.056	-38.589	-2.455	-0.137
6	-153.740	-119.413	-150.115	-117.291	-3.625	-2.122
7	-154.960	-199.572	-151.385	-195.496	-3.575	-4.076
8	-104.550	-51.833	-104.123	-51.461	-0.427	-0.372
9	-105.956	-133.626	-104.981	-131.739	-0.975	-1.887
10	-107.352	-214.878	-105.950	-209.809	-1.402	-5.070
11	-55.197	-65.320	-57.275	-65.307	2.078	-0.013
12	-56.789	-148.251	-59.031	-145.708	2.242	-2.543
13	-58.371	-230.625	-59.621	-226.102	1.250	-4.524
14	57.142	-70.088	57.142	-70.088	0.000	0.000
15	55.166	-153.202	55.566	-150.155	-0.399	-3.047
16	53.204	-235.756	53.028	-229.608	0.175	-6.148
17	117.198	-61.190	117.198	-61.190	0.000	0.000
18	115.045	-143.340	115.351	-139.930	-0.306	-3.411
19	112.907	-224.944	112.428	-219.303	0.479	-5.640
20	175.830	-52.504	175.141	-51.909	0.688	-0.594
21	173.509	-133.712	172.827	-130.476	0.682	-3.235
22	171.204	-214.386	170.273	-208.320	0.931	-6.065

表 3. 平行移動・焦点距離の算出と参照点の計算値 (実験 1, 画像 4)

14
17

MOST NEAR (F4,F3) IS GIVEN BY 14 17 1.206049

T4 - T3 0.463055 0.136960 0.560891

MEAN DIFFERENCES	IMAGE4 (U & V)		IMAGE3 (U & V)	
1	1.514428	2.145223	1.587538	1.798125
2	0.444822	1.934749	0.374350	1.362607
3	1.300720	7.218541	1.148935	7.985114
4	4.746091	3.601197	3.481940	3.345199
5	2.454802	0.137162	1.024848	0.809277
6	3.624846	2.121876	2.236770	0.602971
7	3.575287	4.076176	2.134818	2.007822
8	0.426786	0.371966	0.284535	0.320502
9	0.974990	1.887314	0.435225	1.005767
10	1.402342	5.069524	0.841722	3.658636
11	2.078361	0.013343	2.455486	0.250953
12	2.241583	2.542890	2.365723	1.998341
13	1.249823	4.523558	1.298865	4.070159
14	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
15	0.399291	3.047122	0.526558	3.025581
16	0.175355	6.148271	0.099962	6.090772
17	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
18	0.305786	3.410651	0.552401	3.043154
19	0.478710	5.640365	0.043191	5.102190
20	0.688317	0.594038	0.225350	0.510208
21	0.682392	3.235394	0.067939	2.628692
22	0.931167	6.065166	0.121783	5.035782

MEAN DIFFERENCES	IMAGE4 (U & V)		IMAGE3 (U & V)	
	1.349814	2.899297	0.968543	2.484175

表 4. 参照点の計算値のずれ (実験 1)

3RD IMAGE ANALYSIS

GOOD, BECAUSE $F > 0$ IS OBTAINED AS BELOW

4TH ROW OF RT MATRIX FOR T3

VECTOR -6.746 15.738 452.452

ROTATIONAL CENTRE VECTOR IN CAMERA COORD.

VECTOR -11.188 14.484 -0.300

SMALL-T4 IN WORLD COORD.

VECTOR -7.423 14.058 9.073

SMALL-T3 IN WORLD COORD.

VECTOR -6.960 13.921 9.633

TRANSLATION FROM THE WORLD & FX

-1613.010 448.851 -1931.439 3441.013

IMAGE COORDINATES

	CALICULATED(U,V)		MEASURED(U,V)		DIFFERENCES	
1	-90.844	117.193	-92.432	115.395	1.588	1.798
2	90.210	140.890	89.836	139.527	0.374	1.363
3	-96.137	-136.236	-97.286	-128.251	1.149	-7.985
4	-239.328	154.471	-235.846	151.126	-3.482	3.345
5	-240.330	73.223	-239.305	72.413	-1.025	0.809
6	-241.323	-7.273	-239.086	-6.670	-2.237	-0.603
7	-242.307	-87.026	-240.172	-85.018	-2.135	-2.008
8	-192.750	59.908	-193.034	59.587	0.285	0.321
9	-193.983	-21.871	-193.548	-20.865	-0.435	-1.006
10	-195.206	-102.883	-194.364	-99.225	-0.842	-3.659
11	-143.543	46.138	-145.999	45.887	2.455	0.251
12	-145.034	-36.966	-147.399	-34.967	2.366	-1.998
13	-146.510	-119.277	-147.809	-115.207	1.299	-4.070
14	-30.720	41.273	-30.720	41.273	0.000	0.000
15	-32.755	-41.978	-32.229	-38.952	-0.527	-3.026
16	-34.771	-124.434	-34.671	-118.343	-0.100	-6.091
17	29.348	50.378	29.348	50.378	0.000	0.000
18	27.059	-31.686	27.611	-28.643	-0.552	-3.043
19	24.792	-112.978	24.835	-107.876	-0.043	-5.102
20	87.659	59.217	87.434	59.728	0.225	-0.510
21	85.132	-21.694	85.200	-19.055	-0.068	-2.629
22	82.628	-101.855	82.750	-96.819	-0.122	-5.036

表 5. 平行移動・焦点距離の算出と参照点の計算値（実験 1, 画像 3）

3 4 4 4 8 8 8 11 14
 4 8 11 12 12 14 17 17 17

MOST NEAR (F4,F3) IS GIVEN BY 11 17 1.059577

T4 - T3 0.257185 0.098137 0.302308

MEAN DIFFERENCES	IMAGE4 (U & V)		IMAGE3 (U & V)	
1	1.441713	1.256107	2.334432	4.115076
2	6.318067	1.444069	3.231644	1.268831
3	1.417986	7.104046	1.649959	8.482912
4	2.112520	1.670565	1.904398	1.338953
5	2.685652	0.526154	3.130500	0.838666
6	2.676758	2.666094	3.189441	1.014767
7	3.074289	5.315025	3.892981	2.235514
8	0.721620	0.177618	0.845026	0.268654
9	0.866170	1.995165	1.094908	1.335262
10	0.997574	3.861877	1.439073	2.783030
11	1.039477	0.302389	1.181988	0.597152
12	1.062112	1.704614	1.000455	2.029858
13	0.953958	3.118053	0.928298	3.890843
14	2.655272	0.413077	2.046430	0.518831
15	3.026945	2.356801	2.470790	2.919677
16	2.677570	3.912820	1.935671	5.641719
17	4.074384	0.327641	2.235155	0.219414
18	4.640054	1.799421	2.707626	2.553894
19	4.317841	3.610981	2.312487	3.796064
20	6.570530	0.442191	3.431263	1.082661
21	6.943364	2.249410	3.684862	2.049238
22	7.157034	4.359355	3.886649	2.969237

MEAN DIFFERENCES	IMAGE4 (U & V)		IMAGE3 (U & V)	
	3.065040	2.300612	2.297002	2.361375

表 6. 参照点の計算値のずれ平均 (実験 1)

INPUT DATA FILE = CAMR31.DAT

INPUT DATA FILE = CAMR32.DAT

IMAGE COORDINATES	IMAGE4 (U & V)		IMAGE3 (U & V)	
1	-3.757812	4.561386	-89.894852	118.370827
2	173.396210	30.215897	87.658722	144.091599
3	-5.890320	-239.635345	-92.125259	-126.468353
4	-147.145889	39.179688	-234.340042	153.644775
5	-149.660950	-38.797729	-236.778442	75.113754
6	-149.315048	-116.793091	-236.440475	-2.953049
7	-149.531235	-194.691742	-236.460785	-81.439819
8	-102.456528	-51.856842	-189.324249	62.172318
9	-103.096924	-129.809570	-189.848007	-16.341522
10	-103.436798	-209.373535	-190.238129	-95.984863
11	-54.744156	-64.061462	-141.276016	49.700378
12	-54.390335	-143.779785	-140.894730	-30.481598
13	-56.499725	-224.858673	-142.948303	-111.511780
14	57.271667	-69.048798	-28.675552	44.295181
15	58.603424	-150.402374	-27.420349	-37.163239
16	56.968018	-229.844299	-29.062729	-116.398407
17	116.691284	-58.629181	30.811188	54.885345
18	116.616364	-139.324860	30.618256	-25.932327
19	115.766357	-217.620819	29.680145	-104.261139
20	173.971588	-50.929779	88.116608	62.596603
21	173.322083	-129.322144	87.430054	-15.859360
22	171.121796	-207.773773	85.234375	-94.303253

REFER POINTS(X,Y,Z)

1	0.000	0.000	0.000	
2	150.000	0.000	0.000	
3	0.000	-150.000	0.000	
4	0.000	0.000	150.000	
5	0.000	-50.000	150.000	
6	0.000	-100.000	150.000	
7	0.000	-150.000	150.000	
8	0.000	-50.000	100.000	
9	0.000	-100.000	100.000	
10	0.000	-150.000	100.000	
11	0.000	-50.000	50.000	
12	0.000	-100.000	50.000	
13	0.000	-150.000	50.000	
14	50.000	-50.000	0.000	
15	50.000	-100.000	0.000	
16	50.000	-150.000	0.000	
17	100.000	-50.000	0.000	
18	100.000	-100.000	0.000	$\phi = -1 \cdot 20'$
19	100.000	-150.000	0.000	
20	150.000	-50.000	0.000	$\phi = -1 \cdot 50'$
21	150.000	-100.000	0.000	
22	150.000	-150.000	0.000	

表 7. 参照点の座標値 (実験 2)

ALPHA	10.243	10.243	-10.243	-10.243	10.243	10.243	-10.243	-10.243
BEHTA	39.309	-140.691	-39.309	140.691	39.309	-140.691	-39.309	140.691
GAMMA	0.532	0.532	0.532	0.532	-179.468	-179.468	-179.468	-179.468

IMAGE UNIT VECTORS(U,V)

0.990862	0.134882
0.009290	0.999957
-0.975202	0.221317

AXIS UNIT VECTORS(X,Y)

PROJECTED UNIT VECTORS

0.774753	0.105464	0.990862	0.134882
0.009142	0.984019	0.009290	0.999957
-0.632198	0.143474	-0.975202	0.221317
-0.774753	-0.105464	-0.990862	-0.134882
0.009142	0.984019	0.009290	0.999957
0.632198	-0.143474	0.975202	-0.221317
0.774753	0.105464	0.990862	0.134882
0.009142	0.984019	0.009290	0.999957
0.632198	-0.143474	0.975202	-0.221317
-0.774753	-0.105464	-0.990862	-0.134882
0.009142	0.984019	0.009290	0.999957
-0.632198	0.143474	-0.975202	0.221317
-0.774753	-0.105464	-0.990862	-0.134882
-0.009142	-0.984019	-0.009290	-0.999957
0.632198	-0.143474	0.975202	-0.221317
0.774753	0.105464	0.990862	0.134882
-0.009142	-0.984019	-0.009290	-0.999957
-0.632198	0.143474	-0.975202	0.221317
-0.774753	-0.105464	-0.990862	-0.134882
-0.009142	-0.984019	-0.009290	-0.999957
-0.632198	0.143474	-0.975202	0.221317
0.774753	0.105464	0.990862	0.134882
-0.009142	-0.984019	-0.009290	-0.999957
0.632198	-0.143474	0.975202	-0.221317

SOLUTION 1TH ALPHA4, BEHTA4, GAMMA4 10.243452 39.309080 0.532271

SOLUTION ANGLE, ALPHA3, BEHTA3, GAMMA3 12.060923 40.689870 0.820718

表 8. 回転角の算出 (実験 2)

REFERENCE IS ITH \$ JTH 4 14

4TH IMAGE ANALYSIS

GOOD, BECAUSE F>0 IS OBTAINED AS BELOW

4TH ROW OF RT MATRIX FOR T4

VECTOR -0.580 0.132 -2257.908

TRANSLATION FROM THE WORLD & FX

-1408.029 401.650 -1718.802 3608.869

IMAGE COORDINATES

	CALICULATED(U,V)		MEASURED(U,V)		DIFFERENCES	
1	-2.830	4.337	-3.758	4.561	0.928	-0.224
2	175.492	30.175	173.396	30.216	2.096	-0.041
3	-5.007	-243.705	-5.890	-239.635	0.883	-4.070
4	-147.146	39.180	-147.146	39.180	0.000	0.000
5	-147.303	-40.283	-149.661	-38.798	2.358	-1.485
6	-147.459	-119.154	-149.315	-116.793	1.856	-2.361
7	-147.614	-197.441	-149.531	-194.692	1.917	-2.749
8	-100.946	-52.767	-102.457	-51.857	1.510	-0.910
9	-101.280	-132.867	-103.097	-129.810	1.817	-3.058
10	-101.612	-212.365	-103.437	-209.374	1.825	-2.991
11	-53.058	-65.663	-54.744	-64.061	1.686	-1.601
12	-53.582	-147.032	-54.390	-143.780	0.809	-3.252
13	-54.101	-227.778	-56.500	-224.859	2.398	-2.919
14	57.272	-69.049	57.272	-69.049	0.000	0.000
15	56.321	-150.648	58.603	-150.402	-2.282	-0.246
16	55.378	-231.621	56.968	-229.844	-1.590	-1.777
17	116.477	-59.372	116.691	-58.629	-0.215	-0.742
18	115.314	-139.920	116.616	-139.325	-1.302	-0.595
19	114.160	-219.858	115.766	-217.621	-1.606	-2.237
20	174.118	-49.950	173.972	-50.930	0.146	0.980
21	172.754	-129.474	173.322	-129.322	-0.568	-0.152
22	171.401	-208.404	171.122	-207.774	0.279	-0.630

表9. 平行移動・焦点距離の算出と参照点の計算値（実験2，画像4）

4
14

MOST NEAR (F4,F3) IS GIVEN BY 4 14 1.181752

T4 - T3 0.412306 0.140390 0.486689

MEAN DIFFERENCES	IMAGE4 (U & V)		IMAGE3 (U & V)	
1	0.927564	0.223942	1.253203	1.038901
2	2.095909	0.040501	2.367282	0.003787
3	0.883125	4.069871	1.197790	3.591594
4	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
5	2.357726	1.485110	2.245678	1.403610
6	1.855661	2.361000	1.716425	2.676100
7	1.916842	2.748899	1.546867	2.939913
8	1.510080	0.909753	1.865324	1.269719
9	1.816524	3.057810	2.017588	3.109359
10	1.824962	2.991238	2.039008	3.215305
11	1.685867	1.601286	2.173784	1.954357
12	0.808570	3.252158	1.230996	3.166243
13	2.398492	2.919473	2.727348	2.909633
14	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
15	2.282054	0.245951	2.240961	0.077379
16	1.589647	1.776936	1.576813	1.755457
17	0.214592	0.742474	0.162070	0.754583
18	1.302457	0.595252	1.168224	0.567552
19	1.606425	2.237418	1.420150	2.260831
20	0.146403	0.979673	0.496371	1.144129
21	0.567905	0.152045	0.219518	0.145234
22	0.278767	0.629827	0.584183	0.851648
MEAN DIFFERENCES	IMAGE4 (U & V)		IMAGE3 (U & V)	
	1.275890	1.500937	1.374981	1.583424

表 10. 参照点の計算値のずれ (実験 2)

3RD IMAGE ANALYSIS

GOOD, BECAUSE $F > 0$ IS OBTAINED AS BELOW

4TH ROW OF RT MATRIX FOR T3

VECTOR 3.634 2.966 -417.268

ROTATIONAL CENTRE VECTOR IN CAMERA COORD.

VECTOR 9.710 -13.347 -0.337

SMALL-T4 IN WORLD COORD.

VECTOR 5.905 -12.985 -8.310

SMALL-T3 IN WORLD COORD.

VECTOR 5.493 -12.845 -8.797

TRANSLATION FROM THE WORLD & FX

-1408.442 401.791 -1719.288 4264.787

IMAGE COORDINATES

	CALICULATED(U,V)		MEASURED(U,V)		DIFFERENCES	
1	-88.642	117.332	-89.895	118.371	1.253	-1.039
2	90.026	144.088	87.659	144.092	2.367	-0.004
3	-90.927	-130.060	-92.125	-126.468	1.198	-3.592
4	-234.340	153.645	-234.340	153.645	0.000	0.000
5	-234.533	73.710	-236.778	75.114	2.246	-1.404
6	-234.724	-5.629	-236.440	-2.953	1.716	-2.676
7	-234.914	-84.380	-236.461	-81.440	1.547	-2.940
8	-187.459	60.903	-189.324	62.172	1.865	-1.270
9	-187.830	-19.451	-189.848	-16.342	2.018	-3.109
10	-188.199	-99.200	-190.238	-95.985	2.039	-3.215
11	-139.102	47.746	-141.276	49.700	2.174	-1.954
12	-139.664	-33.648	-140.895	-30.482	1.231	-3.166
13	-140.221	-114.421	-142.948	-111.512	2.727	-2.910
14	-28.676	44.295	-28.676	44.295	0.000	0.000
15	-29.661	-37.241	-27.420	-37.163	-2.241	-0.077
16	-30.640	-118.154	-29.063	-116.398	-1.577	-1.755
17	30.649	54.131	30.811	54.885	-0.162	-0.755
18	29.450	-26.500	30.618	-25.932	-1.168	-0.568
19	28.260	-106.522	29.680	-104.261	-1.420	-2.261
20	88.613	63.741	88.117	62.597	0.496	1.144
21	87.211	-16.005	87.430	-15.859	-0.220	-0.145
22	85.819	-95.155	85.234	-94.303	0.584	-0.852

表 1 1. 平行移動・焦点距離の算出と参照点の計算値（実験 2, 画像 3）

2 3 3 3 4 4 4 4
 4 4 8 12 8 11 12 14

MOST NEAR (F4,F3) IS GIVEN BY 4 12 1.008963

T4 - T3 0.266262 0.082537 0.355961

MEAN DIFFERENCES	IMAGE4 (U & V)		IMAGE3 (U & V)	
1	0.591136	0.634655	1.057955	1.499289
2	1.711603	0.615803	1.322595	0.682950
3	0.582039	1.710316	0.798056	1.378771
4	0.554431	0.612061	0.597213	0.625374
5	2.022472	0.851161	1.968840	0.764397
6	1.692107	1.330644	1.766078	1.043598
7	1.783865	2.141003	1.834887	1.146713
8	0.848572	0.541877	0.960541	0.571645
9	1.125443	1.539419	1.177701	1.270869
10	1.155588	1.473409	1.296062	1.260780
11	0.992524	0.758112	1.259783	0.835027
12	0.501338	1.407931	0.652815	1.196599
13	1.497875	1.347152	1.488220	1.212139
14	1.713072	1.351338	2.065049	1.403763
15	3.961168	1.800979	4.292109	1.942304
16	3.235503	1.474858	3.614427	1.535596
17	2.208696	0.651371	2.635658	0.780114
18	3.240587	1.203745	3.622719	1.470813
19	3.489385	1.156102	3.855767	1.122582
20	2.331994	2.028095	2.473719	2.393751
21	2.866939	1.480396	3.040300	1.689985
22	2.373571	1.950354	2.357533	1.691642

MEAN DIFFERENCES	IMAGE4 (U & V)		IMAGE3 (U & V)	
	1.839996	1.275490	2.006274	1.250850

表 1 2. 参照点の計算値のずれ平均 (実験 2)

ERROR ANALYSIS

REF.P	TX	TY	TZ	FX
2	2527.686766	-705.704003	3028.906246	-6159.086353
3	2523.654173	-704.634890	3023.833393	107.746384
2	-148.673209	41.508022	-178.153883	519.931644
4	-149.007022	41.539075	-178.661283	1086.826522
2	147.584806	-40.421015	173.488409	-219.283271
8	146.574283	-40.183245	172.171316	1379.191380
2	887.578479	-247.236976	1061.149744	-2091.304064
11	885.027939	-246.535957	1057.979060	1894.621882
2	701.967278	-195.389498	838.618555	-1622.661493
12	700.472254	-195.028416	836.684157	747.045415
2	-4463.477479	1245.491938	-5345.694926	11107.872372
14	-4457.511120	1243.711206	-5338.492397	2090.262524
2	-17202.960834	4802.046825	-20610.552805	42226.484058
15	-17175.105659	4793.822578	-20576.790087	176.127519
2	-4414.431967	1231.470865	-5285.515993	10901.582948
17	-4407.316391	1229.305606	-5276.989378	277.617903
3	-1400.838168	391.099529	-1678.612846	3476.858531
4	-1401.238756	391.232315	-1679.076294	4068.566533
3	-4159.895874	1160.531603	-4984.768986	10303.725111
8	-4167.737870	1163.325690	-4993.545139	21516.569914
3	441.361007	-124.999653	528.879262	-1054.688187
11	441.628995	-125.210192	529.003976	-1311.240554
3	1298.242056	-366.731873	1555.672770	-3236.927336
12	1298.244738	-366.909081	1555.407391	-2955.220656
3	238.349689	-68.817741	285.612471	-552.761291
14	237.921078	-68.783197	284.952864	193.764959
3	780.194247	-223.510298	934.900345	-1948.238957
15	778.978875	-223.232690	933.303524	25.686053
3	1430.380226	-401.064456	1714.012851	-3508.223753
17	1428.124974	-400.507990	1711.112724	64.995588
4	-561.958163	156.892907	-675.157137	1480.430998
8	-561.960691	156.840685	-675.240857	1570.305736
4	-696.693538	194.509630	-836.683780	1794.100798
11	-696.541215	194.416138	-836.573032	1673.250267
4	-644.661336	179.982778	-774.725942	1668.847876
12	-644.748128	179.962929	-774.900384	1873.275036

表 1 3. 複数の参照点組に対する平行移動・焦点距離の算出

4	-37965.092844	10599.461279	-45489.225274	92298.632499
14	-37904.295835	10581.654296	-45415.316123	1164.900724
4	26668.702433	-7445.625906	31961.127962	-64640.527807
15	26628.155216	-7433.993747	31911.464634	-3537.016449
4	377.935705	-105.515740	462.981258	-788.089098
17	376.719861	-105.231931	461.393095	1122.949725
8	-854.404410	238.615338	-1025.744626	2180.188623
11	-852.438729	237.869618	-1023.613847	-396.541300
8	-746.920554	208.840670	-897.423292	1913.939459
12	-747.157903	208.877234	-897.762010	2330.286972
8	-1160.136217	322.375517	-1388.850127	3005.544646
14	-1159.644100	322.199261	-1388.300781	2300.992100
8	2480.061857	-694.568230	2974.468001	-6099.376799
15	2476.829757	-693.748056	2970.346233	-958.910843
8	-647.221007	179.198457	-774.276010	1733.406808
17	-646.916738	179.050333	-773.995968	1327.472217
11	5826.696142	-1625.991547	6979.450567	-14089.543193
12	5815.186355	-1622.639820	6965.428910	3259.892712
11	-2807.262799	781.668982	-3363.594823	7305.088090
14	-2803.040185	780.361957	-3358.568490	656.733421
11	-5.110768	-1.985782	-4.427485	88.229026
15	-5.071783	-2.087812	-4.518070	105.071987
11	-1765.371695	491.147570	-2115.482499	4587.322695
17	-1765.547340	491.234547	-2115.641919	4860.623102
12	-195.942947	51.976691	-235.605169	582.161837
14	-195.212145	51.656943	-234.877707	-461.844460
12	2481.522470	-697.921874	2974.021671	-6323.294045
15	2477.792735	-696.932981	2969.329911	-271.651371
12	487.076915	-137.912564	582.432566	-1129.382217
17	486.213312	-137.746384	581.250592	294.656341
14	2876.844836	-802.982781	3451.691859	-6894.166480
15	2871.723785	-801.563172	3445.344061	837.786723
14	-1613.473515	448.988004	-1931.999921	4150.030025
17	-1613.010460	448.851045	-1931.439030	3441.012690
15	9294.903465	-2596.181796	11141.396967	-2278 ^d 955722
17	9279.906227	-2591.900403	11122.995961	116 876157

表 1 3 の 続 き

OK DATA (FRATIO, ATZ = 1.500 500.000) FOR I & J REF. POINTS

REF.P	TX	TY	TZ	FX
3	-1400.838168	391.099529	-1678.612846	3476.858531
4	-1401.238756	391.232315	-1679.076294	4068.566533
4	-561.958163	156.892907	-675.157137	1480.430998
8	-561.960691	156.840685	-675.240857	1570.305736
4	-696.693538	194.509630	-836.683780	1794.100798
11	-696.541215	194.416138	-836.573032	1673.250267
4	-644.661336	179.982778	-774.725942	1668.847876
12	-644.748128	179.962929	-774.900384	1873.275036
8	-746.920554	208.840670	-897.423292	1913.939459
12	-747.157903	208.877234	-897.762010	2330.286972
8	-1160.136217	322.375517	-1388.850127	3005.544646
14	-1159.644100	322.199261	-1388.300781	2300.992100
8	-647.221007	179.198457	-774.276010	1733.406808
17	-646.916738	179.050333	-773.995968	1327.472217
11	-1765.371695	491.147570	-2115.482499	4587.322695
17	-1765.547340	491.234547	-2115.641919	4860.623102
14	-1613.473515	448.988004	-1931.999921	4150.030025
17	-1613.010460	448.851045	-1931.439030	3441.012690

表 1 4. 適切な参照点の組

REFERENCE IS ITH \$ JTH 2 3

4TH IMAGE ANALYSIS

GOOD, BECAUSE F>0 IS OBTAINED AS BELOW

4TH ROW OF RT MATRIX FOR T4

VECTOR 0.000 0.000 -2324.184

TRANSLATION FROM THE WORLD & FX

-1465.888 409.261 -1756.562 3636.414

IMAGE COORDINATES

	CALICULATED(U,V)		MEASURED(U,V)		DIFFERENCES	
1	-4.103	3.331	-4.103	3.331	0.000	0.000
2	169.568	26.234	177.721	27.309	-8.153	-1.075
3	-9.258	-239.614	-9.258	-239.614	0.000	0.000
4	-146.761	38.949	-146.528	38.891	-0.233	0.058
5	-147.899	-38.991	-150.056	-38.589	2.157	-0.402
6	-149.028	-116.372	-150.115	-117.291	1.087	0.919
7	-150.149	-193.200	-151.385	-195.496	1.236	2.296
8	-102.030	-51.671	-104.123	-51.461	2.094	-0.210
9	-103.344	-130.215	-104.981	-131.739	1.637	1.524
10	-104.648	-208.190	-105.950	-209.809	1.301	1.619
11	-54.698	-64.754	-57.275	-65.307	2.577	0.552
12	-56.209	-144.498	-59.031	-145.708	2.822	1.210
13	-57.708	-223.653	-59.621	-226.102	1.913	2.448
14	53.408	-69.364	57.142	-70.088	-3.734	0.723
15	51.493	-149.301	55.566	-150.155	-4.073	0.854
16	49.592	-228.646	53.028	-229.608	-3.437	0.962
17	111.090	-60.701	117.198	-61.190	-6.107	0.489
18	108.989	-139.621	115.351	-139.930	-6.362	0.309
19	106.903	-217.965	112.428	-219.303	-5.525	1.338
20	167.274	-52.262	175.141	-51.909	-7.867	-0.353
21	164.997	-130.191	172.827	-130.476	-7.829	0.285
22	162.736	-207.559	170.273	-208.320	-7.536	0.762

表 15. デバッグによる焦点距離の解析

付録 A：画像座標表現とカメラ座標表現

A1) 直線

画像上の直線 l が $a'U + b'V + c' = 0$ と画像座標表現される時、 l の切片を p, q とすると、(1) より

$$p = \{-c'/a', 0\} = [-s_x c'/a', 0, f_i]$$

$$q = \{0, -c'/b'\} = [0, -s_y c'/b', f_i]$$

よって、 l は以下の式でカメラ座標表現される。

$$aX + bY + c = 0$$

ここで、 $a = a'rat$, $b = b'$, $c = s_y c'$

A2) ベクトル

画像上のベクトルを p とすると、

$$p = \{a', b'\} = [s_x a', s_y b', 0] = s_x [a', b'rat, 0]$$

より、 p の方向ベクトルは $[a, b, 0]$ と表現できる。

ここで、 $a = a'$, $b = b'rat$

A3) 法線ベクトル

$l: aX + bY + c = 0$ の画像切片へのカメラ原点からのベクトル p, q は

$$p = [-c/a, 0, f_i], \quad q = [0, -c/b, f_i]$$

よって、 l とカメラ原点とでできる平面 Γ の法線ベクトル N は p と q のベクトル積より、

$$N = p \times q = [a, b, c/f_i]$$

付録 B：第 4 画像による回転角の算出

(19) を用いて (18) を具体的に書き示すと、

$$a_1 (\cos \beta' \cos \gamma' + \sin \alpha' \sin \beta' \sin \gamma') + b_1 (-\cos \beta' \sin \gamma' + \sin \alpha' \sin \beta' \cos \gamma') = 0 \quad (B1)$$

$$a_2 (\cos \alpha' \sin \gamma') + b_2 (\cos \alpha' \cos \gamma') = 0 \quad (B2)$$

$$a_3 (-\sin \beta' \cos \gamma' + \sin \alpha' \cos \beta' \sin \gamma') + b_3 (\sin \beta' \sin \gamma' + \sin \alpha' \cos \beta' \cos \gamma') = 0 \quad (B3)$$

(B2) より、

$$\tan \gamma' = -b_2/a_2 \quad (B4)$$

(B1) と (B3) をそれぞれ $(\cos \beta' \cos \gamma')$ で割った式に (B4) を代入してえられる 2 つの式を解くと、

$$\tan \beta' = \pm \frac{\sqrt{(a_1 a_2 + b_1 b_2)(a_2 b_3 - a_3 b_2)}}{\sqrt{(a_2 a_3 - b_2 b_3)(a_1 b_2 - a_2 b_1)}} \quad (B5)$$

$$\sin \alpha' = \tan \beta' (a_2 a_3 + b_2 b_3) / (a_2 b_3 - a_3 b_2) \quad (B6)$$

ところで $-\pi/2 \leq \alpha' \leq \pi/2$, $-\pi \leq \beta' < \pi$, $-\pi \leq \gamma' < \pi$ だから、 γ' は γ_0 と $\gamma_0 - \pi$ の 2 意解、 β' は β_0 , $\beta_0 - \pi$, $-\beta_0$, $-\beta_0 + \pi$ の 4 意解、 α' は β' の前二者に対する α_0 と後二者に対する $-\alpha_0$ の 2 意解。その結果、回転角は以下の 8 意解となる。

$$\begin{aligned} A1 &= (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) & A2 &= (\alpha_0, \beta_0 - \pi, \gamma_0) \\ A3 &= (-\alpha_0, -\beta_0, \gamma_0) & A4 &= (-\alpha_0, -\beta_0 + \pi, \gamma_0) \\ A5 &= (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 - \pi) & A6 &= (\alpha_0, \beta_0 - \pi, \gamma_0 - \pi) \\ A7 &= (-\alpha_0, -\beta_0, \gamma_0 - \pi) & A8 &= (-\alpha_0, -\beta_0 + \pi, \gamma_0 - \pi) \end{aligned}$$

次ぎに解の多義性の解消について述べる。ベクトル E の第 4 画像における像の向き、即ち符号は [E] の第 1 要素 X_4 と第 2 要素 Y_4 の符号によってきまる。ところで (7) より [E] = (E) R_{4w}^{-1} だから、ワールド座標軸ベクトル ($i=1, 3$) の像の向きは R_{4w}^{-1} の 1~3 行の最初の 2 要素の組によって決まる。よって 8 意解の各々による回転行列を計算し、所定の要素の符号があう解を選択すればよい。

解の一意性は以下のごとく保証される。A1 = $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ による R_{4w}^{-1} の (i, j) 要素を r_{ij} とおく。すると 8 意解による (i, j) 要素はそれぞれ、

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \\ r_{31} & r_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r_{11} & -r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \\ -r_{31} & -r_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \\ -r_{31} & -r_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r_{11} & -r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \\ r_{31} & r_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -r_{12} & -r_{12} \\ -r_{21} & -r_{22} \\ -r_{31} & -r_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ -r_{21} & -r_{22} \\ r_{31} & r_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r_{11} & -r_{12} \\ -r_{21} & -r_{22} \\ r_{31} & r_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ -r_{21} & -r_{22} \\ -r_{31} & -r_{32} \end{pmatrix}$$

故にどの2つの解をとっても一致するものはないので、像の符号とあうものは1つしかない。

付録C：回転角φの算出

第3カメラ座標系を、回転中心を中心にして Y_3 まわりに $\Delta\phi_A$ 回転した座標系での点の表記を「P」、変位行列を T_{3A} 、回転行列を R_{A3} とすると、2つの座標系の関係は (6) と同型の (C1) で表現できる。

$$[P] = [P] T_{3A} R_{A3}^{-1} T_{3A}^{-1} \quad (C1)$$

ここで、

$$T_{3A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x' & 0 & t_z' & 1 \end{pmatrix} \quad R_{A3} = \begin{pmatrix} \cos\Delta\phi_A & 0 & -\sin\Delta\phi_A & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\Delta\phi_A & 0 & \cos\Delta\phi_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(C1)の行列を $t_A = [t_x', 0, t_z']$ を用いて具体的に示すと、

$$T_{3A} R_{A3}^{-1} T_{3A}^{-1} = \begin{pmatrix} r_1^T & r_2^T & r_3^T & 0^T \\ t_A \cdot (r_1 - i_1) & 0 & t_A \cdot (r_3 - i_3) & 1 \end{pmatrix}$$

ここで、 r_i は $(R_{A3}^{-1})_{3 \times 3}$ の、 i_i は 3×3 の単位行列 I の第 i 列を要素とするベクトルである。0 はゼロベクトルである。

参照点とその像の座標値を $[X_3, Y_3, Z_3]$, $\{u_3', v_3'\}$ 及び $[X_A, Y_A, Z_A]$, $\{u_A'$

, v_A' } と表すと (1) より、

$$u_3 = f_{3x}X_3/Z_3, \quad v_3 = f_{3x}Y_3/Z_3 \quad (C2)$$

$$u_A = f_{3x}X_A/Z_A, \quad v_A = f_{3x}Y_A/Z_A \quad (C3)$$

ここで、 $u_3=u_3'$, $u_A=u_A'$, $v_3=v_3'$ rat, $v_A=v_A'$ rat

ところで、 $X = [X_3, Y_3, Z_3]$ とおき (C1) を展開すると、

$$\begin{aligned} X_A &= X \cdot r_1 + t_A \cdot (r_1 - i_1), & Y_A &= Y_3, \\ Z_A &= X \cdot r_3 + t_A \cdot (r_3 - i_3) \end{aligned} \quad (C4)$$

(C2) における 2 つの式の比をとると、

$$X_3/Y_3 = u_3/v_3 \quad (C5)$$

(C3) における 2 つの式の比をとり (C4) を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} (1 - \cos \Delta \phi_A) t_x'/Y_3 + (t_z'/Y_3 + Z_3/Y_3) \sin \Delta \phi_A \\ = \cos \Delta \phi_A u_3/v_3 - u_A/v_A \end{aligned} \quad (C6)$$

(C6) は変数 t_x'/Y_3 と $t_z'/Y_3 + Z_3/Y_3$ の線型式だから参照点の 2 回の観測 (A, B) により解ける。

$$(t_x'/Y_3, t_z'/Y_3 + Z_3/Y_3) = (a, b) R_{AB}^{-1} \quad (C7)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで、} \quad a &= \cos \Delta \phi_A u_3/v_3 - u_A/v_A & R_{AB} &= \begin{pmatrix} 1 - \cos \Delta \phi_A & 1 - \cos \Delta \phi_B \\ \sin \Delta \phi_A & \sin \Delta \phi_B \end{pmatrix} \\ b &= \cos \Delta \phi_B u_3/v_3 - u_B/v_B \end{aligned}$$

更に、(C3) の後者に (C4) を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} f_{3x}/v_A &= (X_3/Y_3 + t_x'/Y_3) \sin \Delta \phi_A \\ &+ (t_z'/Y_3 + Z_3/Y_3) \cos \Delta \phi_A - t_z'/Y_3 \end{aligned} \quad (C8)$$

(C8) は変数 f_{3x} と t_z'/Y_3 の線型式だから参照点の 2 回の観測 (A, B) により f_{3x} は以下の如く解ける。

$$\begin{aligned} (1/v_A - 1/v_B) f_{3x} &= (X_3/Y_3 + t_x'/Y_3) (\sin \Delta \phi_A - \sin \Delta \phi_B) \\ &+ (t_z'/Y_3 + Z_3/Y_3) (\cos \Delta \phi_A - \cos \Delta \phi_B) \end{aligned} \quad (C9)$$

以上の議論は任意の参照点について成り立つが、ここでは 0_w の像を原点にもっていききたいので、以下では参照点として 0_w を考える。

0_w の像が V 軸上にのるまでの角度を ψ とすると、 R_{A3} における角度を $\Delta \phi_A$ から ψ に変えた行列に対して (C1) が成り立ち、 $u_A=0$ より $X_A=0$ を展開すると、

$$X_3 \cos \psi - Z_3 \sin \psi + t_x' (\cos \psi - 1) - t_z' \sin \psi = 0$$

上式は $T=\tan\phi$ を変数とする以下に示す2次式となるので、 ϕ ($-\pi \leq \phi < \pi$) としては4意解(正解が2、負解が2)がえられる。正負の判定は 0_w の第3画像座標値 u_3' の符号と同じである。残る2意解の判定は、実際に回転してみれば V 軸上にくる方を選択すればよい。

$$AT^2 + BT + C = 0 \quad (C10)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで、} \quad A &= \{ (Z_3/Y_3 + t_z'/Y_3)^2 - (t_x'/Y_3)^2 \} \\ B &= -2 (X_3/Y_3 + t_x'/Y_3) (Z_3/Y_3 + t_z'/Y_3) \\ C &= \{ (X_3/Y_3 + t_x'/Y_3)^2 - (t_x'/Y_3)^2 \} \end{aligned}$$

付録D：回転角 ϕ の算出

ϕ についても ϕ と同様に決定できる。 0_w の像が V 軸上にくるまで ϕ だけ回転した座標系での点の表記を「P」、この座標系から X 軸まわりに $\Delta\phi_c$ 回転した座標系の表記を『P』とする。変位行列を T_{mc} 、回転行列を R_{cm} とすると、2つの座標系の関係は(6)と同型の(D1)で表現できる。

$$『P』 = 「P」 T_{mc} R_{cm}^{-1} T_{mc}^{-1} \quad (D1)$$

$$\text{ここで、} \quad T_{mc} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t_y' & t_z' & 1 \end{pmatrix} \quad R_{cm} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Delta\phi_c & \sin\Delta\phi_c & 0 \\ 0 & -\sin\Delta\phi_c & \cos\Delta\phi_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(D1) の行列を $t_m = 「0, t_y', t_z'」$ を用いて具体的に示すと、

$$T_{mc} R_{cm}^{-1} T_{mc}^{-1} = \begin{pmatrix} r_1^T & r_2^T & r_3^T & 0^T \\ 0 & t_m \cdot (r_2 - i_2) & t_m \cdot (r_3 - i_3) & 1 \end{pmatrix}$$

ここで、 r_i は $(R_{cm}^{-1})_{3 \times 3}$ の、 i_i は 3×3 の単位行列 I の第 i 列を要素とするベクトルである。 0 はゼロベクトルである。

0_w とその像の座標値を「 X_m, Y_m, Z_m 」、 $\{0, v_m'\}$ 及び『 X_c, Y_c, Z_c 』、 $\{0, v_c'\}$ と表すと(1)より

$$X_M = 0, \quad v_M = f_{3x} Y_M / Z_M \quad (D2)$$

$$v_C = f_{3x} Y_C / Z_C \quad (D3)$$

ここで、 $v_M = v_M' \text{rat}$, $v_C = v_C' \text{rat}$ である。

(D1) を展開し Z_M で割ると、

$$\begin{aligned} Y_C / Z_M &= \cos \Delta \phi_C Y_M / Z_M + \sin \Delta \phi_C \\ &\quad - (1 - \cos \Delta \phi_C) t_y' / Z_M + \sin \Delta \phi_C t_z' / Z_M \\ Z_C / Z_M &= -\sin \Delta \phi_C Y_M / Z_M + \cos \Delta \phi_C \\ &\quad - \sin \Delta \phi_C t_y' / Z_M - (1 - \cos \Delta \phi_C) t_z' / Z_M \end{aligned}$$

これらを (D3) に代入すると、(C9) と (D2) より f_{3x} と Y_M / Z_M は既に算出されているので、 t_y' / Z_M と t_z' / Z_M に関する線型式が1つ求まる。よって2回の観測 (C, D) により解ける。

$$(t_y' / Z_M, t_z' / Z_M) = (c, d) R_{CD}^{-1} \quad (D4)$$

ここで、

$$R_{CD} = \begin{pmatrix} f_{3x} (1 - \cos \Delta \phi_C) - v_C \sin \Delta \phi_C & f_{3x} (1 - \cos \Delta \phi_D) - v_D \sin \Delta \phi_D \\ -f_{3x} \sin \Delta \phi_C - v_C (1 - \cos \Delta \phi_C) & -f_{3x} \sin \Delta \phi_D - v_D (1 - \cos \Delta \phi_D) \end{pmatrix}$$

$$c = f_{3x} (\cos \Delta \phi_C Y_M / Z_M + \sin \Delta \phi_C) + v_C (\sin \Delta \phi_C Y_M / Z_M - \cos \Delta \phi_C)$$

$$d = f_{3x} (\cos \Delta \phi_D Y_M / Z_M + \sin \Delta \phi_D) + v_D (\sin \Delta \phi_D Y_M / Z_M - \cos \Delta \phi_D)$$

0_w の像が原点に一致するまでの角度を ϕ とすると、 R_{CM} における角度を $\Delta \phi_C$ から ϕ に変えた行列に対して、(D1) における『P』を [P] におきかえた式が成り立ち、 $v_C = 0$ より $Y_C = 0$ を展開すると、

$$\cos \phi Y_M + \sin \phi Z_M - (1 - \cos \phi) t_y' + \sin \phi t_z' = 0$$

上式は $T = \tan \phi$ を変数とする以下に示す2次式となるので、 ϕ ($-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$) としては正解と負解の2意解がえられる。正負の判定は v_M' の符号と反対である。

$$AT^2 + BT + C = 0 \quad (D5)$$

$$\text{ここで、} \quad A = \{ (1 + t_y' / Z_M)^2 - (t_y' / Z_M)^2 \}$$

$$B = 2 (1 + t_y' / Z_M) (Y_M / Z_M + t_y' / Z_M)$$

$$C = \{ (Y_M / Z_M + t_y' / Z_M)^2 - (t_y' / Z_M)^2 \}$$